UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
Disciplina : Analise Real.
Professora: Rita de Cássia de Jesus Silva
Data : 31.08.08
Semestre: 2008.2

1ª Lista de Exercícios

1. Usando indução, prove:

(i) $1+2+3+4+...+n = n(n+1)/2$

(ii) $1+3+5+...+2n-1 = n^2$

(iii) $(a-1)(1+a+...+a^n) = a^{n+1}-1,$ sejam quais forem $a,n \in \aleph$

(iv) $1+4+9+...n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. Prove que se $X \subset Y$ e Y é um conjunto finito então X é finito .

3. Seja $f : X \to Y$ uma função injetiva. Se Y é finito então X é finito.

4. Seja $f : X \to Y$ uma função sobrejetiva. Se X é finito então Y é finito

5 . Sejam X um conjunto finito e Y um conjunto infinito. Prove que existe uma função injetiva $f : X \to Y$ e uma função sobrejetiva $f : Y \to X$

6. Prove que Z é enumerável.

7 . Se X é infinito, então existe um subconjunto infinito $Y \subset X$ enumerável.

8. Dê exemplo de uma seqüência decrescente $X_1 \supset X_2 \supset ... \supset X_n \supset ...$ de conjuntos infinitos cuja interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ seja vazia.

9. Defina $f : \aleph \, X \, \aleph \to \aleph$ pondo $f(m,n) = 2^{m-1}(2n-1)$. Prove que f é uma bijeção.

10. Prove que existe $g : \aleph \to \aleph$ sobrejetiva tal que $g^{-1}(n)$ é infinito, para cada $n \in \aleph$.

11. Exprima $\aleph = \aleph \cup \aleph \cup ... \cup \aleph \cup ...$ como união infinita de subconjuntos infinitos dois a dois disjuntos.

12. Prove que Q é arquimediano.

13. Prove que todo intervalo não degenerado possui números racionais e irracionais.

14. Prove que $\left| |x| - |y| \right| \leq |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \Re$.

15. Para todo $x \neq 0$ em $\Re$, prove que $(1+x)^{2n} > 1 + 2nx$.

16 .Sejam $A \subset B$ conjuntos não vazios limitados de números reais. Prove que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

17 Dado $A \subset \Re$ não-vazio, limitado inferiormente, seja $-A = \{-x; x \in A\}$.
Prove que $-A$ é limitado superiormente e que $\sup(-A) = -\inf(A)$

18. Dados $A, B \subset \Re$ não-vazios e limitados, seja $A + B = \{x + y; x \in A,\ y \in B\}$. Prove:
(i) $A + B$ é limitado.
(ii) $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$
(iii) $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$

19. Prove que, um conjunto $I \subset \Re$ é um intervalo se, e somente se, $a < x < b,\ a,b \in I \Rightarrow x \in I$.

20. Sejam X=$\left\{ \frac{1}{2n},\ \mathrm{n} \in \mathrm{IN} \right\}$ e $Y = (-\infty, 2)$. Determine ,justificando:
(i) inf X, sup X, supY
(ii) Sejam X e Y como no item 2.2 e W tal que $X \subset W \subset Y$. Sabendo-se que sup W$\in$Z

e 3/2$\in$W , determine sup W.