UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
Disciplina : Analise Real.
Professora: Rita de Cássia de Jesus Silva
Data : 11.09.06
Semestre: 2006.2

2ª Lista de exercícios

1. Dadas as seqüências (x_n) e (y_n), defina (z_n) pondo $z_{2n-1} = x_n$ e $z_{2n} = y_n$. Se $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$, prove que $\lim_{n\to\infty} z_n = a$

2. Prove que se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ então $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$ Dê um contra exemplo mostrando que a recíproca é falso salvo quando $a = 0$

3. Se $\aleph = \aleph_1 \cup \aleph_2 \cup ... \cup \aleph_k$ e $\lim_{n\in N_1} x_n = \lim_{n\in N_2} x_n = ... = \lim_{n\in N_k} x_n = a$ então $\lim_{n\in N} x_n = a$

4. Prove que a seqüência de Cauchy não pode ter dois valores de aderência distintos.

5. Diga justificando,quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

   5.1 Se (x_n) e (y_n) são seqüências tais que $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0$ então existem os limites $\lim_{n\to\infty} x_n = L_1$, $\lim_{n\to\infty} y_n = L_2$ e $L_1 = -L_2$

   5.2 Se $\lim_{n\in N} x_n = +\infty$ e $\lim_{n\in N} \mathrm{y}_\mathrm{n} = 0$ então $\lim_{n\in N} (x_n . y_n)$ não existe.

   5.3 Se (a_n) e (b_n) são seqüências de números reais positivos tais que $\lim_{n\in N} \mathrm{a}_\mathrm{n} = 0$ e $\lim_{n\in N} \mathrm{b}_\mathrm{n} = 0$ então $\lim_{n\in N} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 1$.

   5.4 Se $\lim_{n\in N} \mathrm{a}_\mathrm{n}$ existe e $\lim_{n\in N} \mathrm{b}_\mathrm{n}$ não existe então $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ não existe.

6. Se (x_n) e (y_n) são seqüências tais que $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ e $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0$. Mostre utilizando a definição de limite que $\lim_{n\in N} x_n = -b$.

7. Se $\lim_{n\in N} x_n = a \neq 0$ e $\lim_{n\in N} (x_n . y_n) = b$ prove , utilizando definição de limite que $\lim_{n\in N} \mathrm{y}_\mathrm{n} = \frac{b}{a}$.

8. Se $\lim_{n\in N} x_n = a$ e $\lim_{n\in N}\left(x_n - y_n\right) = 0$ prove , utilizando definição de limite que $\lim_{n\in N} \mathrm{y_n} = a$.

9. Seja $b \neq 0$. Prove , utilizando definição de limite que se $\lim_{n\in N} x_n = a$ e $\lim_{n\in N}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = b$ então $\lim_{n\in N} \mathrm{y_n} = \frac{a}{b}$.

10. Prove que $\lim_{n\in N}\sqrt[n]{n} = 1$.

11. Sejam $k \in N$ e $a > 0$. Se $a \leq x_n \leq n^k$ para todo $n \in \aleph$, então $\lim_{n\in N}\sqrt[n]{x_n} = 1$.

12. Sabendo que $2 \leq z_n \leq 5$, para todo $n \in \aleph$ e que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 4$, calcule

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n y_n + (1-z_n)x_n + 2y_n}{4x_n - y_n}.$$

13. Prove que se $\lim_{n\to\infty}\left|x_n\right| = +\infty$ então $\left(x_n\right)$ não possui subseqüências convergentes.

14. Dadas a seqüência $\left(y_n\right)$cujo n-ésimo termo é $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Mostre que $\lim_{n\to\infty} y_n = e$.

15. Seja $a > 1$. Prove que $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n} = +\infty$

16. Seja $a > 0$. Prove que $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{a^n} = +\infty$

17. Prove que se $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ e existe $c > 0$ tal que $y_n > c$ para todo $n \in \aleph$ então $\lim_{n\in N}\left(x_n . y_n\right) = +\infty$

18. Prove que se (x_n) é limitada e $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ então $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = 0$