UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
Disciplina : Analise Real.
Professora: Rita de Cássia de Jesus Silva
Data : 15. 10.2008
Semestre: 2008.2

3ª Lista de Exercícios

1. Prove que, para todo $X \subset \Re$ tem-se $int(int(X) = int(X)$ e conclua que $int(X)$ é um conjunto aberto.

2. Um conjunto $A \subset \Re$ é aberto se, e somente se, cumpre a seguinte condição: “ Se uma seqüência (x_n) converge para um ponto $a \in A$ então $(x_n) \in A$ para todo n suficientemente grande.”

3. Para todo $X \subset \Re$, prove que vale a reunião disjunta $\Re = int(X) \cup int(\Re - X) \cup F$, onde F é formado pelos pontos $x \in \Re$ tais que toda vizinhança de x contém pontos de X e pontos de $\Re - X$. O conjunto $F = frX$ chama-se fronteira de X. Prove que A é aberto se , e somente se $A \cap frA = \emptyset$.

4. Para cada um dos conjuntos seguintes, determine sua fronteira: $X = [0,1]$, $Y = (0,1) \cup (1,2)$, $Z = Q$, $W = Z$.

5. Sejam $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ intervalos limitados dois a dois disjuntos, cuja a interseção $I = \cap_{n=1}^{\infty} I_n$ não é vazia. Prove que I é um intervalo, o qual nunca é aberto.

6. Prove que todo intervalo da reta só admite a cisão trivial

7. Prove que, para todo $X \subset \Re$, vale $\overline{X} = X \cup frX$. Conclua que X é fechado se, e somente se, $X \supset frX$.

8. Para todo $X \subset \Re$, prove que $\Re - int\, X = \overline{\Re - X}$ e $\Re - \overline{X} = int(\Re - X)$.

9. Se $X \subset \Re$ é aberto (respectivamente fechado) e $X = A \cup B$ é uma cisão, prove que A e B são abertos (respectivamente fechado).

10. Prove que se $X \subset \Re$ tem fronteira vazia então $X = \emptyset$ ou $X = \Re$.

11. Sejam $X, Y \subset \Re$. Prove que $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e que $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dê exemplo em que $\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$.

12. Prove que para todo $X \subset \Re$, tem-se $\overline{X} = X \cup X'$.

13. Prove que X é fechado se, e somente se, $X' \subset X$

14. Prove que, para todo $X \subset \Re$, X' é um conjunto fechado.

15. Sejam $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ não-vazios. Dê exemplos mostrando que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ pode ser vazio se os F_n são apenas fechados ou apenas limitados.

16. Sejam X, Y conjuntos disjuntos e não-vazios, com X compacto e Y fechado. Prove que existem $x_0 \in X, y_0 \in Y$ tais que $|x_0 - y_0| \leq |x - y|$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.

17. Um conjunto compacto cujos pontos são todos isolados é finito. Dê exemplo de um conjunto fechado ilimitado X e um conjunto limitado não-fechado Y, cujos pontos são todos isolados.

18. Descreva X' em cada caso abaixo:
(a) $X = \left\{ \frac{1}{n}, n \in N \right\}$
(b) $X = Z$
(c) $X = (a, b]$

19. Complete com verdadeiro ou falso, justificando
(a) $X = (a, b] \Rightarrow int\, X = X$
(b) $int\, Q = \emptyset$
(c) $int\, N = \emptyset$
(d) $X = \{p\} \Rightarrow int\, X = \emptyset$

20. Prove que os únicos subconjuntos conexos de $\Re$ são os intervalos.

21. Prove que se todos os pontos de X são isolados então X é enumerável.

22. Prove que um conjunto $A \subset \Re$ é aberto se, e somente se, $A \cap \overline{X} \subset \overline{A \cap X}$ para todo $X \subset \Re$.