Instituto de Matemática, UFBA
1ª Lista de Exercícios de Álgebra II
Prof. José Fernandes S. Andrade

1. Determine os divisores de zero e os elementos inversíveis dos anéis: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_{12}$ e $\mathbb{Z}_{30}$.

2. Mostre que num anel com unidade um elemento não pode ser ao mesmo tempo inversível e divisor de zero.

3. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e $f(x.y) = f(x).f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$. Mostre que f ou é a função identidade em $\mathbb{Z}$ ou é a função nula.

4. Seja A um anel tal que $x^2 = x$, $\forall\, x \in A$.

   a. Mostre que $x = -x \;\forall\, x \in A$.

   b. Mostre que A é um anel comutativo. (Sugestão: Desenvolva $(x + y)^2 = x + y$).

5. Seja D um domínio e $a \in D - \{0\}$. Mostre que a aplicação $\varphi_a : D \to D$ dada por $\varphi_a(x) = ax$ é injetiva.

6. a. Mostre que num domínio a equação $x^3 = x$ tem no máximo três soluções.

   b. Determine as soluções de $x^3 = x$ em $\mathbb{Z}_8$.

7. Seja $\{I_j\}_{j\in N}$ uma coleção de ideais de um anel A. Mostre que $I = \cap I_j$ é um ideal de A.

8. Seja $\{I_j\}_{j\in N}$ uma coleção de ideais de um anel A tais que $I_j \subset I_{j+1}$. Mostre que $I = \cup I_j$ é um ideal de A.

9. Seja A um anel comutativo e $a \in A$. Mostre que $I = \{x \in A; x.a = 0\}$ é um ideal de A.

10. a. Seja A um anel e I e J ideais. Mostre que $I + J = \{x + y | x \in I, y \in J\}$ é um ideal de A.

    b. Se $A = \mathbb{Z}$, $I = (10)$ e $J = (12)$, determine um gerador para o ideal $I + J$.

11. Determine todos os ideais de $\mathbb{Z}_{12}$.

12. Seja $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ subanel de $\mathbb{Z}_4$. Determine o ideal de B gerado por $\overline{2}$.

13. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel com unidade 1. Definimos em A duas novas operações dadas por:

$$a \oplus b = a + b + 1$$
$$a \odot b = a.b + a + b$$

    a. Mostre que $(A, \oplus, \odot)$ é um anel com unidade.

b. Qual o elemento neutro de $(A, \oplus)$?

c. Qual o elemento unidade de $(A, \oplus, \odot)$?

d. Mostre que se A é um anel comutativo então $(A, \oplus, \odot)$ é também um anel comutativo.

14. Dê exemplo de um ideal $I \subset \mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{Z}/I$ não é um domínio.

15. Sejam I e J ideais de um anel A tais que $I \cap J = \{0\}$. Mostre que $xy = 0$, $\forall x \in I$, $\forall y \in J$.

16. Seja p um número primo e $A = \{m/n;\ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \text{ e } \text{mdc}(p, n) = 1\}$.

    Seja $I = \{m/n \in A;\ p|m\}$.

    a. Mostre que A é um subanel de $\mathbb{Q}$.

    b. Mostre que I é um ideal de A.

    Suponha agora que $p = 7$ e seja $J = \{m/n \in A;\ 49|m\}$.

    c. Dê exemplo de três elementos inversíveis de A.

    d. J é primo?

17. Considere no anel $\mathbb{Z}_{12}$ os ideais $I = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$ e $J = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$. Diga, justificando a resposta, se I e J são ideais primos de $\mathbb{Z}_{12}$.

18. Seja A um anel comutativo e seja $I = \{x \in A;\ x^n = 0 \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$.

    a. Mostre que I é um ideal de A. (I é chamado de radical de A).

    b. Mostre que se $\overline{x} \in A/I$ e $\overline{x}^n = \overline{0}$ para algum n então $\overline{x} = \overline{0}$.

19. Seja $f : A \to A'$ um homomorfismo de anéis e J' um ideal de A'. Mostre que $f^{-1}(J') = \{a \in A;\ f(a) \in J'\}$ é um ideal de A.

20. Mostre que os anéis $2\mathbb{Z}$ e $3\mathbb{Z}$ não são isomorfos. (Lembre-se que os grupos $2\mathbb{Z}$ e $3\mathbb{Z}$ são isomorfos).

21. Mostre que $\alpha : \mathcal{C}[0, 1] \to R$ definida por $\alpha(f) = f(0)$ é um homomorfismo de anéis.

22. Mostre que não existe um homomorfismo $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ tal que $f(1) = 1/2$.

23. Seja A um anel comutativo com unidade. Mostre que todo ideal maximal I é um ideal primo.

24. Dê exemplo de um anel não comutativo onde exista um ideal maximal que não é primo.