Instituto de Matemática, UFBA
$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de Álgebra II
Prof. José Fernandes S. Andrade

1. Seja $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por $f(p(X)) = p(1)$.

   a. Mostre que f é um homomorfismo sobrejetor.

   b. Mostre que $\mathrm{Nuc}(f) = (X - 1)$.

   c. Conclua que $\mathbb{R}[X]/(X - 1)$ é isomorfo a um corpo. Qual?

2. Seja $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}$ a aplicação definida por $f(p(X)) = p(-2)$.

   a. Mostre que f é um homomorfismo sobrejetor.

   b. Determine $Nuc(f)$.

   c. $(X + 2)$ é um ideal maximal de $\mathbb{Z}[X]$? Utilize os itens anteriores para justificar a resposta.

3. Mostre que o corpo de frações do domínio $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi; a, b \in Z\}$ é $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi; a, b \in Q\}$

4. Determine o corpo de frações de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

5. Determine se possível o corpo de frações de $\mathbb{Z}_6$. E o de $\mathbb{Z}_7$?

6. Seja $f(X) = \overline{2}X^{10} + \overline{3}X^7 + \overline{5}X^4 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_7[X]$. Encontre um polinômio $g(X)$ de grau ≤ 6 em $Z_7[X]$ tal que $f(a) = g(a)\, \forall a \in \mathbb{Z}_7$.

7. Determine o grau dos seguintes polinômios:

   a. $(1 + X)^2(1 - X^3)^4 \in \mathbb{Q}[X]$

   b. $(1 + X + X^2 + X^3 + X^4)^7 \in \mathbb{Z}_7[X]$

   c. $(1 + 2X^2)^4 \in \mathbb{Z}_8[X]$

8. Seja D um domínio e $f, g \in D[X]$ tais que $\partial(f^3) = 15$ e $\partial(fg) = 8$. Determine $\partial(g - f)$.

9. Encontre um polinômio não constante inversível no anel $\mathbb{Z}_8[X]$.

10. a. Determine as raízes do polinômio $f(X) = X^4 + \overline{2}X^2 - X + \overline{3} \in \mathbb{Z}_5[X]$.

    b. Sem fazer contas e utilizando o item a, determine os polinômios mônicos de grau 1 que dividem $f(X)$.

11. Mostre que todo polinômio $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ de grau ímpar possui uma raiz em $\mathbb{R}$. (Sugestão: use o teorema do valor intermediário visto no curso de Cálculo I).

12. Seja $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ um polinômio com coeficientes inteiros.

    a. Mostre que se $a \in \mathbb{Z}$ é uma raiz de $f(X)$, então $a|a_0$.

    b. Verifique se a equação $X^3 + 3X^2 - 4X - 12 = 0$ tem raízes inteiras.

13. Seja $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ um polinômio com coeficientes inteiros.

    a. Mostre que se $a = p/q \in \mathbb{Q}$ é uma raiz de $f(X)$ com p e q primos entre si, então $p|a_0$ e $q|a_n$.

    b. Verifique se a equação $3X^3 - 2X^2 - 6 = 0$ tem raízes racionais.

14. Seja $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ um polinômio mônico e $c \in \mathbb{Q}$ uma raiz de $f(X)$. Mostre que $c \in \mathbb{Z}$.

15. Sejam A e B anéis comutativos com unidade tais que $B \subset A$.

    a. Mostre que $B[X]$ é um subanel de $A[X]$.

    b. Se $h(X) = f(X) + g(X)$ com $f(X), g(X), h(X) \in A[X]$ e dois destes polinômios estão em $B[X]$, então o terceiro também está em $B[X]$.

16. Aplique o algorítmo da divisão para os polinômios $f(X)$, $g(X)$ abaixo:

    a. $f(X) = X^5 - 3X^2 - X + 3$ e $g(X) = X^2 + 2X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

    b. $f(X) = X^2 + X + \overline{3}$ e $g(X) = X^6 + \overline{2}X^4 + \overline{3}X \in \mathbb{Z}_7[X]$

    c. $f(X) = X^5 + \overline{3}X^2 + \overline{2}$ e $g(X) = X^3 - \overline{1} \in \mathbb{Z}_7[X]$

    d. $f(X) = X^2 + \overline{1}$ e $g(X) = \overline{2} \in \mathbb{Z}_7[X]$

17. Sejam K um corpo, $f(X) \in K[X]$ e $a \in K$. Mostre que o resto da divisão de $f(X)$ por $X - a$ é $f(a)$.

18. Em duas tentativas de aplicar o algorítmo da divisão entre os polinômios $X^3 - 2$ e $X + 1$ no anel $\mathbb{Q}[X]$ foram obtidos os seguintes resultados:

    $$X^3 - 2 = (X^2 - X + 1)(X + 1) - 3 \qquad \text{com resto negativo}$$

    e

    $$X^3 - 2 = (X^2 - X - 2)(X + 1) + 3X$$

    Qual dos resultados está correto?

19. Sejam $f(X), g(X), q(X), r(X) \in K[X]$ tais que $f(X) = q(X).g(X) + r(X)$ onde K é um corpo. Seja $d(X) = \text{mdc}(f(X), g(X))$. Mostre que $d(X) = \text{mdc}(g(X), r(X))$.

20. Determine o máximo divisor comum entre os polinômios:

    a. $X^2 - 1$ e $X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

    b. 3 e $X \in \mathbb{Z}[X]$

    c. $(X - i)^5(X^3 - 2X + 1)$ e $X^4 - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

    d. $X^3 + \overline{2}X^2 + \overline{3}X + \overline{2}$ e $X^2 + \overline{4} \in \mathbb{Z}_5[X]$.

    Sempre que possível, escreva o máximo divisor comum como combinação dos dois polinômios do par.

21. Sejam K um corpo e $f(X), g(X) \in K[X]$. Mostre que se $d(X)$ é um máximo divisor comum de $f(X)$ e $g(X)$ então $ad(X)$ também é um máximo divisor comum de $f(X)$ e $g(X)$, $\forall\, a \in K,\ a \neq 0$.

22. Quais dos subconjuntos abaixo de $\mathbb{Q}[X]$ são ideais de $\mathbb{Q}[X]$? Em caso afirmativo, determine o gerador mônico do ideal e diga se o ideal é ou não um ideal maximal.

    $I = \{f(X) \in \mathbb{Q}[X]; f(2) = 0 \text{ e } f(0) = f(1)\}$

    $J = \{f(X) \in \mathbb{Q}[X]; f(2) = 0 \text{ e } f(0) = 0\}$

    $L = \{f(X) \in \mathbb{Q}[X]; f(\sqrt{3}) = 0\}$

23. Se possível, dê exemplo:

    a. de um polinômio de grau n com coeficientes em um anel A com mais de n raízes.

    b. de um polinômio de grau n com coeficientes em um domínio A com mais de n raízes.

    c. de um polinômio irredutível em $\mathbb{Z}[X]$ que não é irredutível em $\mathbb{Q}[X]$.

    d. de um polinômio irredutível em $\mathbb{Q}[X]$ que não é irredutível em $\mathbb{R}[X]$.

    e. de um polinômio irredutível em $\mathbb{Z}[X]$ que não gera um ideal maximal.

    f. de um polinômio irredutível em $\mathbb{R}[X]$ que não gera um ideal maximal.

24. Seja K um corpo e $f(X) \in K[X]$ tal que $\partial f(X) \geq 2$ e $f(X)$ possui uma raiz em K. Mostre que $f(X)$ é redutível em $K[X]$.

25. Determine todos os polinômios irredutíveis de grau ≤ 3 em $\mathbb{Z}_3[X]$.

26. Mostre que $X^2 + 1$ é irredutível em $\mathbb{R}[X]$. Identifique o corpo $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$.

27. Mostre que $X^4 + 4 \in \mathbb{Q}[X]$ é um polinômio redutível.

28. Verifique se os polinômios abaixo são irredutíveis em $\mathbb{Q}[X]$:

    a. $f(X) = X^2 + 3$

    b. $g(X) = X^7 + X^4 - 3X + 1$

    c. $h(X) = 3X^4 - 70X^3 - 14X^2 + 28$

    d. $m(X) = X^3 + X^2 + X + 4$