Instituto de Matemática, UFBA
3ª Lista de Exercícios de Álgebra II
Prof. José Fernandes S. Andrade

1. Utilize o teorema da fatorização única para determinar o mdc e o mmc de polinômios.
2. Mostre que 2 é um elemento redutível em $\mathbb{Z}[i]$. Conclua que neste anel 2 não é primo.
3. Mostre que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ é um anel euclidiano. (Considere $d(a + b\sqrt{2}) = |a^2 - 2b^2|$).
4. Considere $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

   a. Mostre que os elementos 2, 3, $1 + \sqrt{-5}$ e $1 - \sqrt{-5}$ são irredutíveis e não são associados. Mostre também que estes elementos não são primos.

   b. Tomando as decomposições $6 = 2.3 = (1 + \sqrt{-5}).(1 - \sqrt{-5})$ pode-se concluir que $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ não é fatorial. Justifique a resposta.

   c. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ é um anel euclidiano?
5. Verifique se os seguintes polinômios são irredutíveis em $\mathbb{C}[X, Y]$.

   $Y^2 - X^2 - 1$.

   $Y^2 + X^2$.

   $Y^2 - X(X - a)(X - b)$ com a e b distintos e diferentes de 0. E se $a = 0$?

   $Y^2X + Y^2 + XY + X$.
6. Seja $f(X) = 7X^6 + 18X^4 - 60X^2 + 12 \in \mathbb{Q}[X]$. $\mathbb{Q}[X]/(f(X))$ é um corpo? Justifique a resposta.
7. Verifique se o polinômio $g(X) = X^3 + \overline{3}X^2 + \overline{5}X + \overline{5} \in \mathbb{Z}_7[X]$ possui uma raiz dupla.
8. Seja A um anel fatorial e $f(X) \in A[X]$ um polinômio primitivo. Seja $g(X) \in A[X]$ tal que $g(X)|f(X)$. Mostre que $g(X)$ é primitivo.
9. Escreva $X^3 - Y^3 \in \mathbb{Q}[X, Y]$ como produto de polinômios irredutíveis.
10. Dê exemplo de um polinômio irredutível $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $(f(X))$ não é um ideal maximal.
11. a. Aplique o algorítmo da divisão aos elementos $7 + 10i, 4 \in \mathbb{Z}[i]$ obtendo elementos q, r tais que $7 + 10i = 4q + r$ com $d(r) < d(4)$.

    b. Este quociente e este resto estão unicamente determinados?

12. Considere $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}] = \{a + b\sqrt{-11} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
    a. Mostre que $1 + \sqrt{-11}$ é um elemento irredutível, mas não é um elemento primo.
    b. $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$ é um anel fatorial?
    c. $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$ é um anel euclidiano?

13. Determine o grau do polinômio $X^4 + X^3Y^3 + Y^5 - 2 \in \mathbb{R}[X, Y]$.

14. Mostre que em $\mathbb{R}[X, Y]$, $(X, Y) = (X, Y(X - 1))$.

15. $\mathbb{Z}$ com a aplicação $d(a) = a^2$ é um anel euclidiano? E $\mathbb{Q}$ com a aplicação $d(x) = 12$ se $x \neq 0$?

16. Escreva 70 como produto de elementos irredutíveis em $\mathbb{Z}[i]$.

17. Considere o anel $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
    a. Mostre que $\sqrt{2}$ e $1 + 2\sqrt{2}$ são elementos irredutíveis.
    b. Dê exemplo de um elemento inversível α, $\alpha \neq \pm 1$.
    c. Mostre que se α é inversível então α^n também é inversível.
    d. Conclua que em $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ existem infinitos elementos inversíveis.

18. Mostre que em $\mathbb{Z}[i]$, $1 + i$ e $1 - i$ são associados, mas que se p é primo com $p \equiv 1 \pmod 4$ e $a^2 + b^2 = p$ então $a + bi$ e $a - bi$ não são associados.

19. Determine $\text{mdc}\{1 + i, 1 - i\}$ em $\mathbb{Z}[i]$.

20. Mostre que se $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ e $\alpha | \beta$ então $N(\alpha) | N(\beta)$.