Instituto de Matemática, UFBA
1ª Lista de Exercícios de Álgebra I
Prof. José Fernandes S. Andrade

1. Mostre que para todo número natural n
$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

2. Mostre que $3 \mid (n^3 + 2n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

3. Mostre que a soma dos primeiros n números ímpares é n^2, i. e.
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

4. Determine $(507)_{11}$ nas bases 2, 7 e 10.

5. Se m é um inteiro ímpar, mostre que $[m^2 + (m+2)^2 + (m+4)^2 + 1]$ é divisível por 12.

6. Sejam a, m e $n \in \mathbb{Z}$ e $d = (m, n)$. Mostre que $d = (m, n + am)$.

7. Mostre que se $d = (a, b)$ e $d' = (2a + 5b, -7a + b)$ então $d|d'$.

8. Seja p um número primo e n um inteiro tal que $1 \leq n \leq p-1$. Mostre que o coeficiente binomial $\left(\begin{array}{c} p \\ n \end{array}\right)$ é um inteiro divisível por p.

9. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $d = (a, b, c)$ e $m = [a, b, c]$. Verifique se $dm = abc$.

10. Mostre que se $d = (a, b)$ então $md = (ma, mb)$.

11. Mostre que se a, b, m são inteiros tais que $m > 0$, $a \equiv b (\text{mod } m)$, $|a| < m/2$ e $|b| < m/2$ então $a = b$.

12. Mostre que um número inteiro n é divisível por 8 se e somente se seus 3 últimos algarismos formam um número divisível por 8.

13. Mostre que um número inteiro n é divisível por 25 se e somente se seus 2 últimos algarismos formam um número divisível por 25.

14. Utilize os critérios de divisibilidade para determinar os restos das divisões abaixo:

   a) 6.021.042 por 9

   b) 33×410 por 4

   c) 30.004 por 8

   d) $4.377 + 519$ por 9

   e) 24.536.721 por 11.

   g) 374.987.258.903.002.992.561.178.345.906.230.561.399.545.022 por 25

15. Utilize os critérios de divisibilidade para determinar se:

    a) 67.524.380 é divisível por 220.

    b) 5.143.610.772 é divisível por 72.

16. Mostre que $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $n^{13} - n$ é divisível por 546.

17. Determine o resto da divisão de 11^{73} por 3.

18. Seja $a \in \mathbb{Z}$ e $m \geq 2$. Será que existe um sistema completo de restos módulo m S tal que $a \in S$?

19. Resolva a equação diofantina $23x - 5y = 7$. (Obs: Obtenha a solução geral.)

20. Em cada um dos casos abaixo, verifique se S é um sistema completo de restos módulo m. No caso positivo, obtenha o sistema reduzido de restos correspondente.

    a) $m = 5$, $S = \{-10, -3, 2, 4, 6\}$.

    b) $m = 7$, $S = \{-7, -4, -1, 4, 5, 8, 9\}$.

    c) $m = 6$, $S = \{1, 8, 15, 22, 29, 36, 43\}$.

    d) $m = 12$, $S = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55\}$.

21. Se possível, complete o conjunto $\{-10, -3, 6, 7, 25\}$ para obter um sistema completo de restos módulo 8.

22. Resolva as seguintes congruências:

    a) $13x \equiv 3 \pmod{47}$

    b) $36x \equiv 27 \pmod{43}$

    c) $20x \equiv 29 \pmod{31}$

23. Diga qual aternativa abaixo é correta, sem resolver a equação.

    Seja $a = 2^{54.322}.3$. Então a equação $ax \equiv 14 \pmod{23}$

    i) não tem solução.

    ii) tem uma única solução.

    iii) tem solução, mas não podemos garantir que é única.

24. Mostre que se $a \equiv b \pmod{m}$, $a \equiv b \pmod{n}$ e $(m, n) = 1$ então $a \equiv b \pmod{mn}$

25. Construa as tabelas de adição e multiplicação de $\mathbb{Z}_3$ e $\mathbb{Z}_6$.

26. Construa a tabela de multiplicação de $\mathbb{Z}_6^*$ e $\mathbb{Z}_{10}^*$.

27. Seja m um inteiro ímpar. Mostre que em $\mathbb{Z}_m$ temos $\overline{1} + \overline{2} + \ldots + \overline{m-1} = \overline{0}$.

28. Determine $\varphi(720)$ onde φ denota a função de Euler.

29. a. Encontre uma solução para o sistema:

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{7} \\ x &\equiv 8 \pmod{12} \end{aligned}$$

b. Determine todos os números inteiros que são solução do sistema acima.

30. Seja $n \in \mathbb{N}$. Determine $d = (n, 2n+1)$.

31. Aplique o Pequeno Teorema de Fermat para resolver a equação $5^5 x \equiv 3 \pmod{7}$.

32. Aplique o Teorema de Euler para resolver a equação $19^{119} x \equiv 5 \pmod{225}$.