Instituto de Matemática, UFBA
2ª Lista de Exercícios de Álgebra I
Prof. José Fernandes S. Andrade

1. Seja G o grupo dada pela seguinte tabela:

$\cdot$	e	a	b	c	r	s	t	u
e	e	a	b	c	r	s	t	u
a	a	b	c	e	s	t	u	r
b	b	c	e	a	t	u	r	s
c	c	e	a	b	u	r	s	t
r	r	u	t	s	e	c	b	a
s	s	r	u	t	a	e	c	b
t	t	s	r	u	b	a	e	c
u	u	t	s	r	c	b	a	e

   a. Determine $< a >$, $< r >$, $o(a)$ e $o(r)$.

   b. Quem é o elemento neutro de G?

   c. Qual o inverso de cada elemento de G?

   d. G é cíclico?

   e. G é abeliano?

   f. Seja $H = \{e, s\}$. Determine as classes laterais à direita de H.

2. Considere em $\mathbb{Z}$ a operação $*$ definida por $a * b = a + b + 1$.

   a. Mostre que $(\mathbb{Z}, *)$ é um grupo abeliano.

   b. Verifique se $I = \{z \in \mathbb{Z}; z$ é um número ímpar$\}$ é um subgrupo de $(\mathbb{Z}, *)$.

   c. $(\mathbb{Z}, *)$ é cíclico?

3. Mostre que se G é um grupo abeliano então $(ab)^n = a^n b^n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, a, b \in G$.

4. Encontre no S_3 dois elementos a e b tais que $(ab)^2 \neq a^2b^2$.

5. Mostre que se G é um grupo tal que $(ab)^2 = a^2b^2$, $\forall\, a, b \in G$, então G é um grupo abeliano.

6. Seja G um grupo de ordem par. Mostre que G possui um elemento de ordem 2.

7. Seja G um grupo e H, K subgrupos de G. Mostre que $H \cap K$ é um subgrupo de G.

8. Seja $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Seja $m\mathbb{Z} = \{mz;\ z \in \mathbb{Z}\}$.

   a. Mostre que $m\mathbb{Z}$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}$.

   b. Determine $(\mathbb{Z} : m\mathbb{Z})$ e todas as classes laterais de $m\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

   c. Determine o subgrupo $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$.

9. Seja G um grupo e $Z(G) = \{x \in G; xa = ax\ \forall a \in G\}$. Mostre que $Z(G)$ é um subgrupo de G.

10. Seja G um grupo e $a \in G$. Seja $N(a) = \{x \in G; xa = ax\}$. Mostre que $N(a)$ é um subgrupo de G.

11. Seja G um grupo e $x \in G$, $x \neq e$ tal que $x^6 = x$. Considere o conjunto $H = \{x, x^2, x^3, \ldots\}$.

    a. Quantos elementos tem H? Justifique a resposta.

    b. Determine $o(x)$. Justifique a resposta.

    c. $H < G$? Justifique a resposta.

    d. H é cíclico? Justifique a resposta.

12. Considere a permutação $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 3 & 2 & 5 & 9 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

    a. Escreva s como produto de transposições.

    b. s é uma permutação par ou ímpar?

    c. É possível escrever s como produto de 10 transposições?

    d. Complete com transposições de maneira conveniente para obter a igualdade $s =$ ________________________________ $(2,5)(2,3)(1,4)(7,9)$.

    e. É possível escrever s como produto de apenas 2 transposições?

13. Considere a permutação $s = (1,4,7)\,(3,7)\,(2,5,8,1,3,9) \in S_9$.

    a. Escreva s como produto de ciclos disjuntos.

    b. $s \in A_9$?

14. Determine a ordem da permutação $w = (1,5,2,7,3) \in S_8$.

15. Considere a permutação $\sigma = (1,5,3,2)\,(6,2,7,3)\,(1,3,4)\,(1,6,8)\,(5,8)$.

    a. Escreva σ como produto de ciclos disjuntos.

    b. Utilize a resposta do item anterior para dizer a ordem de σ. Justifique a resposta.

16. Mostre que o produto de dois r-ciclos é uma permutação par.

17. Escreva a permutação $(1,5,3,7)\,(2,4,6,9)$ como produto de triciclos.

18. a. Determine as ordens possíveis para os elementos de S_5.

    b. Para cada ordem, dê exemplo de um elemento com esta ordem.

19. Seja $H = \{(1),\ (1,2,3,4),\ (1,3)(2,4),\ (4,3,2,1)\} \subset S_4$.

    a) Construa a tabela de multiplicação de H.

    b) H é um subgrupo de S_4?

    c) H é um subgrupo de A_4?

20. Mostre que $(a_1, a_2, \ldots, a_k)^{-1} = (a_k, \ldots, a_2, a_1)$.

21. Mostre que se a, i, j são inteiros distintos então $(i, j) = (a, i)(a, j)(a, i)$.

22. Mostre que se k é número ímpar, então $(a_1, a_2, \ldots, a_k)^2$ é um ciclo e que se k é par, então $(a_1, a_2, \ldots, a_k)^2$ é o produto de dois ciclos disjuntos.

23. O grupo alternado A_4 possui um subgrupo de ordem 9?

24. Determine a ordem da permutação $\sigma = (1, 2, 3, 4) \in S_5$.

25. Escreva a transposição $(4, 8) \in S_{10}$ como produto de transposições de números consecutivos.

26. Determine o subgrupo $A_3 < S_3$.

27. Diga se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa, justificando a resposta.

    a. Se G é um grupo de ordem 12 então G pode ter um subgrupo de ordem 8.

    b. Sejam G um grupo, $a, b \in G$ e H um subgrupo de G. Neste caso existe uma bijeção entre as classes laterais aH e Hb.

    c. Seja s uma permutação tal que $s(7) = 7$. Quando se escreve s como produto de transposições, se o número 7 aparecer em uma transposição, então ele tem de aparecer de novo em outra transposição.

    d. Se k é um número par então um k-ciclo é uma permutação par.

28. Sejam $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$ e $\mathbb{R}_+^* = (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$. Verifique se a aplicação $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log x$ é um homomorfismo de grupos. (Obs: $\mathbb{R}_+^* = \{r \in \mathbb{R}; r > 0\}$.)