Instituto de Matemática, UFBA
3ª Lista de Exercícios de Álgebra I
Prof. José Fernandes S. Andrade

1. a. Faça a tabela de multiplicação do grupo D_4

   b. Determine os subgrupos cíclicos. Quantos são eles?

   c. Determine a ordem e o inverso de cada elemento de D_4.

2. Sejam $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$ e $\mathbb{R}_+^* = (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = a^x$ onde $a \in \mathbb{R},\ a > 1$.

   a. Mostre que f é um homomorfismo.

   b. Determine $Nuc(f)$.

   c. f é injetora?

   d. f é isomorfismo?

3. Sejam $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$ e $\mathbb{R}^* = (\mathbb{R}^*, \cdot)$. Seja $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \log |x|$.

   i. Responda para g as perguntas da questão anterior.

   ii. $\mathbb{R}$ é isomorfo a um grupo quociente do grupo $\mathbb{R}^*$?

4. Sejam G e G' grupos, $f : G \to G'$ um homorfismo e $H < G'$. Mostre que $f^{-1}(H) = \{x \in G;\ f(x) \in H\}$ é um subgrupo de G.

5. Seja G um grupo com 3 elementos. Mostre que $G \simeq \mathbb{Z}_3$.

6. Seja G um grupo com 4 elementos. Mostre que $G \simeq \mathbb{Z}_4$ ou G é isomorfo ao grupo de Klein.

7. Seja $n \geq 2$. Mostre que
$$\frac{S_n}{A_n} \simeq \{1, -1\}$$
   onde S_n denota o grupo de permutações e A_n o grupo das permutações pares.

8. Seja T o grupo dado pela seguinte tabela:

·	e	a	b	r	s	t
e	e	a	b	r	s	t
a	a	b	e	t	r	s
b	b	e	a	s	t	r
r	r	s	t	e	a	b
s	s	t	r	b	e	a
t	t	r	s	a	b	e

a. Diga quem é a imagem de cada elemento de T pelo automorfismo interno $I_a : T \to T$.

b. Considere $K = \{e, a, b\}$, subgrupo de T. Sem calcular classes laterais, decida se $K \lhd T$.

9. Seja G um grupo, $H \lhd G$ e $K < G$. Mostre que $HK < G$.

10. Seja G um grupo, $H \lhd G$ e $K \lhd G$. Mostre que $HK \lhd G$.

11. Dar exemplo de dois subgrupos H e K do S_3 tais que HK não é um subgrupo do S_3.

12. Seja $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ e $H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$. Determine o grupo quociente $\mathbb{Z}_6/H$ e construa sua tabela.

13. Seja $G = \{e, a, b, c\}$ o grupo de Klein e $H = \{e, b\}$. Determine o grupo quociente G/H e construa sua tabela.

14. Seja G o grupo dada pela seguinte tabela:

·	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

a. Seja $H = \{1,-1\}$. Determine as classes laterais à esquerda e à direita de H. $H \lhd G$?

b. Seja $g \in G$. Considere o automorfismo interno $I_g : G \to G$. Sem fazer contas, diga quem é $I_g(H)$.

c. Seja $K = \{1,-1,i,-i\}$. Sem calcular classes laterais, decida se $K \lhd G$.

15. Seja G um grupo e $H < G$ tais que $|G| = 50$ e $|H| = 25$. Decida se $H \lhd G$.

    Se fizer sentido falar no grupo quociente G/H, descreva seus elementos.

16. Determine os automorfismos internos de D_4. Quantos são eles?

17. Seja $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Considere $G_n = \{z \in C;\ z^n = 1\}$.

    a. Mostre que $G_n < C^*$.

    b. Mostre que $G_n \simeq \mathbb{Z}_n$.

18. O grupo $\mathbb{Z}_9^*$ é cíclico?

19. a. Dê exemplo de um automorfismo $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$ diferente da identidade.

    b. Quantos elementos tem Aut $(\mathbb{Z}_4)$?

20. Decida se as aplicações abaixo são automorfismos. Justifique a resposta.

    a. $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$ dado por $f(\overline{1}) = \overline{2}$

    b. $g : G \to G$ dada por $g(x) = x^{-1}$, onde G é um grupo abeliano.

    c. $h : S_3 \to S_3$ dada por $h(x) = x^{-1}$.

21. Determine todos os subgrupos de $\mathbb{Z}_{20}$.

22. Seja $G = \{R_i | R_i$ representa a rotação de $2\pi i/20$ radianos, $i = 0, \ldots, 19\}$ o grupo das rotações de um polígono regular de 20 lados. Determine todos os subgrupos de G.

23. Considere o produto direto $G_1 \times G_2$ dos grupos G_1 e G_2. Sejam $H_1 \lhd G_1$ e $H_2 \lhd G_2$. Mostre que $H_1 \times H_2 \lhd G_1 \times G_2$.

24. Considere o produto direto $G_1 \times G_2$ dos grupos G_1 e G_2. Sejam $a \in G_1$ e $b \in G_2$ elementos de ordens m e n respectivamente. Determine a ordem de $(a, b) \in G_1 \times G_2$.