

Décima segunda lista de exercícios

Exercício 57:

Mostre que as leis da absorção implicam as leis da idempotência.

Exercício 58:

Sejam $a_1 := \{1, 2, 4\}$ e $a_2 := \{1, 3, 9\}$, então $A_1 := (a_1, |)$ e $A_2 := (a_2, |)$ são reticulados.

Determine o reticulado produto $A_1 \times A_2$ e desenhe o diagrama de Hasse.

Exercício 59:

Os reticulados do exercício 48. são

- (i) distributivos? (ii) complementados?

Exercício 60:

Mostre que na definição 4.47 as condições (i) e (ii) são equivalentes.

Exercício 61:

- (i) Seja $R := (a, \leq)$ um reticulado. Para $x, y, z \in a$ mostre que
 $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z)$.

- (ii) Seja $R := (a, \leq)$ um reticulado distributivo. Para $x, y, z \in a$ mostre que
se $x \wedge y = x \wedge z$ e $x \vee y = x \vee z$ então, $y = z$. (*)

Se um elemento $x \in a$ for complementado, qual conclusão podemos tirar de (*)?

Exercício 62:

Numa álgebra de Boole temos que

- (i) $\neg\neg x = x$.
(ii) $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$.
(iii) $x \leq y$ sse $x \wedge \neg y = \perp$ sse $\neg y \leq \neg x$ sse $\neg x \vee y = \top$.