

Oitava lista de exercícios

Exercício 36:

Demonstre o lema 3.28 da aula.

Exercício 37:

Demonstre o lema 3.31 da aula

Exercício 38:

Defina a união $\bigcup_{i=1}^n a_i$ e a interseção $\bigcap_{i=1}^n a_i$ por recursão e demonstre as leis distributivas:

$$(i) \ a \cap \bigcup_{i=1}^n a_i = \bigcup_{i=1}^n (a \cap a_i). \quad (ii) \ a \cup \bigcap_{i=1}^n a_i = \bigcap_{i=1}^n (a \cup a_i).$$

Exercício 39:

Mostre para conjuntos a, b e c :

$$(i) \ (a - b) - c = (a - c) - (b - c). \quad (ii) \ a \cap (b \triangle c) = (a \cap b) \triangle (a \cap c).$$

Exercício 40:

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Sejam dadas as seguintes relações:

- (i) $r_1 := \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$
- (ii) $r_2 := \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \ xy \geq 1\}.$
- (iii) $r_3 := \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \ x \geq y^2\}.$

Desenhe no plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ estas relações e determine os domínios e os codomínios destas três relações.

Exercício 41:

Seja $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} - \{0\}$. Considerando o produto Cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ definimos a seguinte relação r $\langle a, b \rangle \ r \ \langle c, d \rangle$ sse $ad = bc$.

(i) Mostre que r é uma relação de equivalência.

(ii) Seja $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/r$. Defina $\langle a, b \rangle/r + \langle c, d \rangle/r := \langle ad + bc, bd \rangle/r$. Mostre que esta definição é independente dos representantes, isto é, se $\langle a, b \rangle/r = \langle a', b' \rangle/r$ e $\langle c, d \rangle/r = \langle c', d' \rangle/r$ então, $\langle a, b \rangle/r + \langle c, d \rangle/r = \langle a', b' \rangle/r + \langle c', d' \rangle/r$.