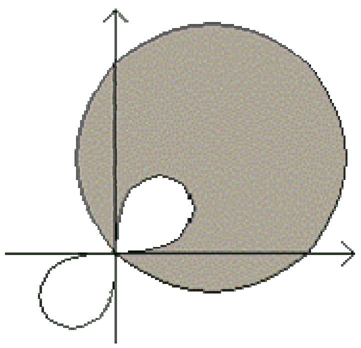
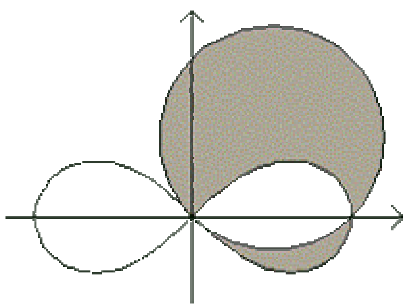
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - UFBA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
2ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE MAT 042 - CÁLCULO II-A
Atualização: 18-04-2006

1) Nos problemas a seguir encontre a área das regiões indicadas:
A) Interior à circunferência $r = \cos(\theta)$ e exterior à cardióide $r = 1- \cos(\theta)$.
B) Exterior à circunferência $r = \cos(\theta)$ e interior à cardióide $r = 1- \cos(\theta)$.
C) Interior à rosácea $r = 2\cos(3\theta)$ e exterior à circunferência $r = 1$.
D) Interior à lemniscata $r^2 = a^2\cos(2\theta)$.
E) Intersecção do círculo $r = 1$ com o interior da lemniscata $r^2 = 2\text{sen}(2\theta)$.

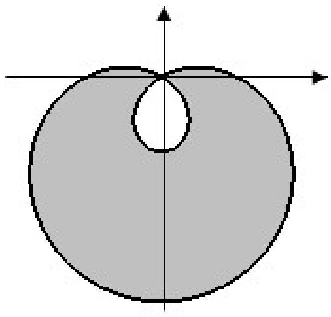
2) Nos problemas a seguir determine uma expressão em integrais que represente a área das regiões indicadas
A) Intersecção do círculo $r = \cos(\theta)$ com o interior da cardióide $r = 1- \cos(\theta)$.
B) Interior à rosácea $r = 2\text{sen}(2\theta)$.
C) Entre a 3ª e 4ª voltas da espiral $r = a\theta$, $a > 0$ e $\theta \geq 0$.

3) Considere os pares de curvas dadas a seguir. Calcule a área hachurada conforme figura de cada item.

A) $r^2 = 4\text{sen}(2\theta)$ e $r = 4(\cos(\theta) + \text{sen}(\theta))$
B) $r^2 = 4\cos(2\theta)$ e $r = 2(\cos(\theta) + \text{sen}(\theta))$.

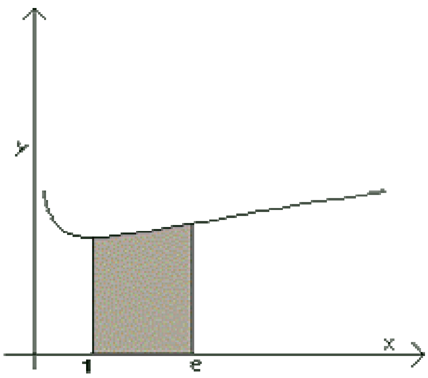



4) Considere a curva de equação polar r = 1 − 2sen(θ) dada a seguir. Determine uma expressão em integrais que represente a área sombreada.



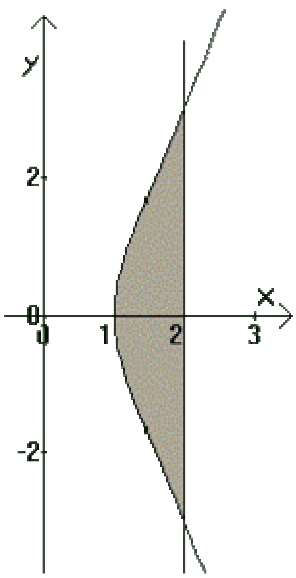
5) Determine a área limitada pelo eixo OX , $x = 1$, $x = e$ e a curva de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = 2 + t^2 \end{cases}$$



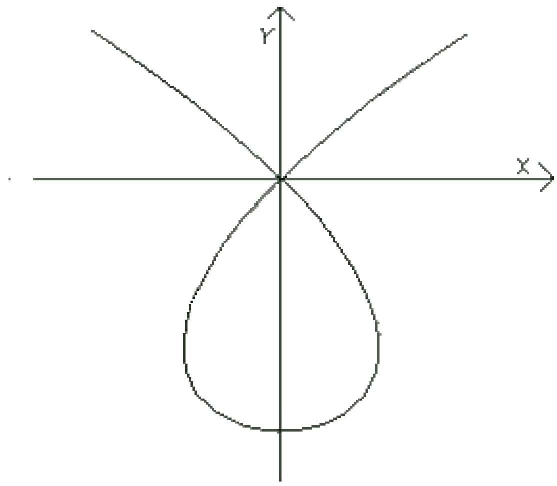
6) Determine a área da região limitada pelas curvas de equações

$x = 2$ e $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$

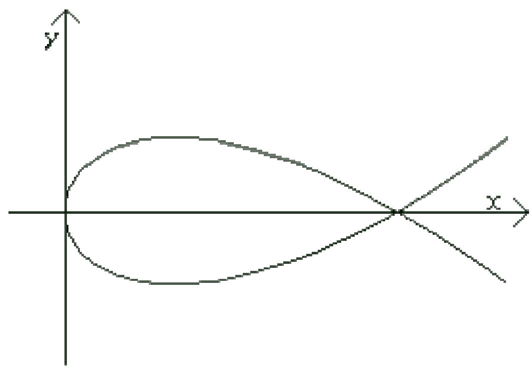


7) Calcule a área limitada pelos laços de curvas dadas a seguir:

A) $\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$



B) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{t^3}{3} \end{cases}$



8) Determine a área da região limitada pelas curvas de equações

$x = 2$ e $\begin{cases} x = \sec t \\ y = tgt \end{cases}$ $\dfrac{-\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$

9) Encontre o comprimento de arco da curva $y = \ln(2\cos x)$ entre os pontos adjacentes da intersecção com o eixo OX.

10) Achar o comprimento de arco da curva $ay^2 = x^3$ da origem até o ponto P($4a$,$8a$).

11) Determine o comprimento de arco da curva $y = 6x^{2/3} + 1$ entre os pontos A(0,1) e B(8,25).

12) As equaçòes $\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = 2t^2 \end{cases}$ dão a posição (x,y) de uma partícula no instante t. Determine a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo $0 \le t \le 5$.

13) Determine o comprimento de arco da curva definida por $\begin{cases} x = 1/t \\ y = \ln t \end{cases}$, quando $1 \le t \le 2$

14) Determine o comprimento de arco da curva definida por $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2$

15) Determine o comprimento de arco da astróide $\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\,\mathrm{sen}^3\theta \end{cases}$, $\theta \in [0,2\pi]$.

16) Determine o comprimento de arco do laço da curva do exercício 8B).

17) Determine o comprimento da espiral logarítmica $r = e^{\theta/2}$ de $\theta = 0$ a $\theta = 2$

18) Calcule o comprimento de arco da curva $r = \cos^2(\theta/2)$

19) Determine a expressão da integral que permite calcular o comprimento dos arcos que limitam as regiões dos exercícios :
A) 1 C) B) 1D)

20) Se a base de um sólido é um círculo de base r e se todas as secções planas perpendiculares a um diâmetro fixo da base são quadrados , encontre o volume do sólido.

21) A base de um sólido é uma região plana limitada por uma elipse com semi-eixo maior de 4 unidades e semi-eixo menor igual a 3 unidades. Cada secção do corte perpendicular ao eixo maior da elipse é um semi-círculo. Calcule o volume do sólido.

22) Calcule, pelo método das secções planas paralelas, o volume de um cone circular reto de altura igual a 30cm e raio da base igual a 10cm.

23) Determine o volume do sólido limitado pelos dois cilindros $x^2 + y^2 = R^2$ e $y^2 + z^2 = R^2$

24) Calcule o volume do sólido limitado pelo parabolóide elíptico $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z$ e o plano $z = c$, $c > 0$.

25) Uma cunha é cortada de um sólido na forma de um cone circular reto, tendo raio da base de 5cm e uma altura de 20cm, por dois semi-planos pelo eixo do cone . O ângulo entre os dois semi-planos tem uma medida de 30°. Encontre o volume da cunha cortada.

26) A base de um sólido é uma região plana limitada pela hipérbole $16x^2 - 9y^2 = 144$ e a reta $x = 6$.Cada secção de corte do sólido, perpendicular ao eixo OX é um triângulo equilátero. Calcule o volume do sólido.

27) Encontre o volume do sólido gerado pela rotação em torno de OX da região limitada por $y = 0$ e a parábola $y = ax - x^2, \quad a > 0$.

28) Usando integraçào, determine o volumen do cone circular reto de altura h e raio da base r.

29) Determine o volume do sólido gerado quando a região limitada pela parábola $y^2 = 4ax, \ \ a > 0$ e a reta $x = a$ gira em torno dessa reta.

30) Determine o volume do sólido gerado quando a região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ gira em torno de:

A) $x = -2$ B) $y = -3$

31) A região limitada pelas curvas $x^2 - y^2 = a^2$ e $x = 2a, \quad a > 0$, gira em torno da reta $x = 0$. Determine o volumen do sólido gerado.

32) Ache o volume do toro gerado pela rotação do círculo $x^2 + y^2 = 4$ em torno da reta $x = 3$.

33) Determine o volume do sólido de revolução obtido quando a região limitada por $y = e^x$ $y = e^{-x}$ e $x = 1$ gira em torno de $x = 0$.

34) Dê a expressão da integral que permite calcular o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $x = 2y^2$ e $x = 3 - y^2$ em torno da reta $x = 5$.

35) Dê a expressão da integral que permite calcular o volume do sólido de revolução obtido quando a região limitada pelo arco de ciclóide $\begin{cases} x = t - \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$ e o eixo OX gira em torno de:

A) $y = -1$; B) $x = \pi$; C) $y = 0$

36) Calcule as seguintes integrais impróprias ou mostre que divergem:

A) $\int_1^{+\infty} x^{-4}dx$ B) $\int_1^{+\infty} x^{-1/2}dx$ C) $\int_{-\infty}^{+\infty} 2x(x^2+1)^{-1}dx$

D) $\int_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}dx$ E) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx$ F) $\int_0^{+\infty} \cos(bx)dx$

G) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ H) $\int_a^b x^{-2/3}dx,\ a<0<b$ I) $\int_e^{10} \frac{dx}{x.\ln x.\ln(\ln x)}$

J) $\int_1^{+\infty} x^{-1}(x-1)^{-1/2}dx$ K) $\int_{-\infty}^{0} x.5^{-x^2}dx$ L) $\int_0^3 (x-1)^{-2}dx$

M) $\int_{1/2}^{2} \frac{dx}{x.(\ln x)^{1/5}}$ N) $\int_0^2 \frac{dx}{x(\ln x)^{1/5}}$ O) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$

P) $\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{x}dx$ Q) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ R) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

37) Verifique se é possível encontrar um número real medida de área da região entre os gráficos de:

A) $y=1/x,\quad y=0$ e $x=1$, à direita da reta $x=1$.

B) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, eixos OX e OY e $x=4$, à esquerda da reta $x=4$.

C) $y=-\dfrac{a^3}{a^2+x^2},\ a>0$ (Curva de Agnesi) e $y=0$.

D) $y=e^x$ e $y=0$, situada à esquerda do eixo OY.

38) Ache o volume do sólido obtido pela rotação da área compreendida entre as curvas $y=e^x$, $x=0$, $y=0$ e situada à esquerda de OY, quando esta gira em torno do eixo OX e do eixo OY.

39) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo OX, da região situada à direita da reta $x=1$ e compreendida entre a curva $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ e o eixo OX.

40) Determine os valores de K para os quais a integral I a seguir é convergente e o seu valor para cada K encontrado.

A) $\mathrm{I}=\int_0^1 \mathrm{x}^{\mathrm{K}}\ln \mathrm{x}\mathrm{dx}$; B) $I=\int_1^{+\infty} x^{-K}dx$; C) $I=\int_0^{+\infty} x^2(x^3+1)^K dx,\quad K\neq 0$ e $K\neq -1$

RESPOSTAS

1) A) $\frac{12\sqrt{3}-4\pi}{12}$; B) $\frac{11\pi+12\sqrt{3}}{12}$; C) $\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}$ D) a^2; E) $\frac{6-3\sqrt{3}+\pi}{3}$;

2) A) $\int_0^{\pi/3}(1-\cos(\theta))^2 d\theta+\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos^2(\theta)d\theta$; B) $16\int_0^{\pi/4}\text{sen}^2(2\theta)d\theta$; C) $\frac{1}{2}\left(\int_{6\pi}^{8\pi}a^2\theta^2 d\theta-\int_{4\pi}^{6\pi}a^2\theta^2 d\theta\right)$;

3) A) $8\pi - 2$; B) $2+\pi$; 4) $\int_{-\pi/2}^{\pi/6}(1-2\,\text{sen}(\theta))^2 d\theta-\int_{\pi/6}^{\pi/2}(1-2\,\text{sen}(\theta))^2 d\theta$ 5) $\frac{9e-10}{4}$;

6) $\frac{52}{15}$; 7) A) $\frac{8}{15}$; B) $\frac{8\sqrt{3}}{5}$

8) $2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}\right|$; 9) $2.\ln(2+\sqrt{3})$; 10) $\frac{8a\left(\sqrt{10^3}-1\right)}{27}$; 11) $40\sqrt{5}-64$

12) $10\sqrt{26}+2.\ln(5+\sqrt{26})$; 13) $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\ln\left|\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right|$; 14) $\sqrt{2}(1-e^{-\pi/2})$; 15) $6a$;

16) $4\sqrt{3}$; 17) $\sqrt{5}(e-1)$; 18) 4; 19) A) $S = 6\int_0^{\pi/9}\left(2\sqrt{\cos^2 3\theta+9\,\text{sen}^2 3\theta}+1\right)d\theta$

20) $\frac{16r^3}{3}$; 21) 24π; 22) 1000π cm^3; 23) $\frac{16R^3}{3}$; 24) $\frac{\pi.abc^2}{2}$; 25) $\frac{125\pi}{9}$; 26) $64\sqrt{3}$

27) $\frac{\pi a^5}{30}$; 28) $\frac{\pi r^2 h}{3}$; 29) $\frac{32\pi a^3}{15}$; 30) A) $\frac{49\pi}{30}$; B) $\frac{23\pi}{10}$; 31) $4\sqrt{3}\pi a^3$; 32) $24\pi^2$;

33) $\frac{4\pi}{e}$; 34) $V=\pi\int_{-1}^{1}\left(21-24y^2+3y^4\right)dy$; 35) A) $V=\pi\int_0^{2\pi}\left((2-\cos t)^2-1\right)(1-\cos t)dt$;

B) $V=\pi\int_0^{\pi}\left(\pi-(t-\text{sen}\,t)^2\right)\text{sen}\,t\,dt$; C) $V=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt$

36) As integrais B, C, F, I, L, N, P divergem . As demais convergem a: A) 1/3; D) 1/2; E) 1/2;
G) 2; H) $3\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}\right)$; J) π; K) $-1/(2\ln 5)$; M) 0; O) 2; Q) $\pi/2$; R) π;

37) A) Não; B) Sim, 4; C) Sim, $\pi.a^2$; D) Sim, 1; 38) $\pi/2$ e 2π; 37) $\pi/2$;

39) A) $K>-1$; $I = \frac{-1}{(K+1)^2}$; B) $K>1$, $I = \frac{1}{K-1}$; C) $K<-1$, $I = \frac{-1}{3K+3}$