**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**
**MATA07 – ÁLGEBRA LINEAR A**
**PROFESSORES: Glória Márcia, Enaldo Vergasta**

# 1ª LISTA DE EXERCÍCIOS

**1)** Sejam A, B e C matrizes inversíveis de mesma ordem, encontre a expressão da matriz X, nos itens abaixo:

**a)** $AB^t X = C$ **b)** $AB + CX = I$ **c)** $(CB)^{-1} AX = I$ **d)** $(AB)^t XC = I$

**2)** Encontre as matrizes de ordem dois que comutam com $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**3)** Uma matriz A de ordem n é dita idempotente se $A^2 = A$

**a)** Mostre que se AB = A e BA = B, então A e B são idempotentes.

**b)** Mostre que $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ é idempotente.

**4)** Encontre a matriz LRFE de cada uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**5)** Descreva todas as possíveis matrizes $2 \times 2$ que estão na forma LRFE.

**6)** Determine o posto e a nulidade de cada uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**7)** Dê exemplos, se possível, de matrizes satisfazendo as condições dadas abaixo.

OBS: Considere N(A) como a nulidade de A e p(A) como o posto de A.

**a)** $B_{2\times 3}$, p(B) = 2 ; **b)** $D_{2\times 4}$, p(D) = 3 ; **c)** $C_{3\times 2}$, p(C) = 3;

**d)** $F_{2\times 3}$, N(F) = 2; **e)** $G_{4\times 3}$, N(G) = 0 ; **f)** $H_3$, N(H) = 0; **g)** $J_3$, p(J) = 2.

**8)** Resolva os seguintes sistemas:

**a)** $\begin{cases} x + 2y - 2z = -6 \\ 3x + 2y - 2z = -2 \\ 3x - 5z = -9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3x + y + 4z = 6 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - y - z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \\ 3x + 6y - 4z = 3 \end{cases}$.

**9)** Determine a solução do sistema $\begin{cases} 2x + (i - 1)\ y + w = 0 \\ 3y - 2iz + 5w = 0 \end{cases}$, considerando o conjunto dos números complexos.

**10)** Um biólogo colocou três espécies de bactéria (denotadas por I, II e III) em um tubo de ensaio, onde elas serão alimentadas por três fontes diferentes de alimentos (A, B e C). A cada dia serão colocadas no tubo de ensaio 2.300 unidades de A, 800 unidades de B e

1.500 unidades de C. Cada bactéria consome um certo número de unidades de cada alimento por dia, como mostra a Tabela abaixo.Quantas bactérias de cada espécie podem coexistir no tubo de ensaio de modo a consumir todo o alimento?

| | Bactéria I | Bactéria II | Bactéria III |
|---|---|---|---|
| Alimento A | 2 | 2 | 4 |
| Alimento B | 1 | 2 | 0 |
| Alimento C | 1 | 3 | 1 |

**11)** Discuta em função de **k** os seguintes sistemas:

**a)** $\begin{cases} -4x+3y=2 \\ 5x-4y=0 \\ 2x-y=k \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y-kz=0 \\ kx+y-z=2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x-2y+kz=2 \\ 2x-y+kz=3 \\ x-ky+z=0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+kz=-2 \\ x-y-2z=k \\ x+ky+4z=-5 \end{cases}$.

**12)** Determine os valores de **a** e **b** que tornam o seguinte sistema possível e determinado

$$\begin{cases} 3x-7y=a \\ x+y=b \\ 5x+3y=5a+2b \\ x+2y=a+b-1 \end{cases}.$$

**13)** Considere as seguintes matrizes inversíveis

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**a)** Encontre a expressão de X tal que BAX= C.

**b)** Determine, caso exista, a inversa da matriz X do item a.

**14)** Dada a matriz B em cada um dos seguintes itens, determine a matriz N, linha reduzida à forma escada (LRFE), linha equivalente a B e uma matriz invertível M, de ordem 3, tal que N = MB.

**a)** $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; **b)** $B=\begin{pmatrix} 2 & 2-i & 0 \\ 1+i & \frac{3+i}{2} & -5-i \end{pmatrix}$.

**15)** Verifique se as matrizes a seguir são inversíveis e, em caso afirmativo, determine a inversa, usando escalonamento:

**a)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**16)** Determine os valores de ***a*** e ***b*** para que as matrizes abaixo sejam invertíveis

**a)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} a+3 & 7 & 6 \\ -1 & a-5 & -6 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$.

**17)** Verifique se os conjuntos dados a seguir têm a estrutura de espaço vetorial, com as operações dadas.

**a)** $V_1 = R^2$, $+ : R^2 \times R^2 \to R^2$ e $. : R \times R^2 \to R^2$

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ a.(x,y )= (ax,ay)

**b)** $V_2 = M_2(R)$, $+ : M_2(R) \times M_2(R) \to M_2(R)$ e $. : R \times M_2(R) \to M_2(R)$

$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & w_1 + w_2 \end{pmatrix}$ $a . \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & y \\ z & aw \end{pmatrix}$

**18)** Verifique em cada item a seguir se W é um subespaço vetorial de V.

**I.** $V = R^3$

**a)** $W = \{(x,y,z) \in R^3 ; y \leq 0\}$ **b)** $W = \{(x,y,z) \in R^3 ; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

**c)** $W = \{(x,y,z) \in R^3 ; z = 0\}$ **d)** $W = Q^3$ ,Q o conjunto dos racionais.

**e)** $W = \{(x,y,z) \in R^3 ; x.y = 1\}$ **f)** $W = \{(x,y,z) \in R^3 ; y = x^2\}$

**II.** $V = M_n(R)$, $n \geq 2$.

**a)** W ={A$\in$ V ; A é simétrica} **b)** W ={A$\in$ V ; A é invertível}

**c)** W ={A$\in$ V ; A é não invertível} **d)** W ={A$\in$ V ; $A^2 = A$}

**III.** V é o espaço vetorial de todas as funções $f : R \to R$.

**a)** W = {f$\in$ V; f(3) = 0} **b)** W = {f$\in$ V; f(7) = f(1)}

**IV.** $V = M_n(C)$, $n \geq 2$, sobre o corpo C.

W = {A$\in$ V; A é matriz hermitiana (ou auto-adjunta), isto é, $A = \overline{A}^t$}.

**V.** $V = M_n(C)$, $n \geq 2$, sobre o corpo R.

W = {A$\in$ V; A é matriz hermitiana (ou auto-adjunta), isto é, $A = \overline{A}^t$}.

**VI.** V = $C^2$ sobre R.

W = {(a + bi, c + di) $\in$ $C^2$; a – 2c = 0 e b + d = 0}.

**19)**

Verifique se $W_i$ é um subespaço vetorial de $V_i$, em cada item a seguir. (Sugestão: use o fato que o conju

soluções do sistema de equações lineares é um subespaço vetorial de $M_{n \times 1}(R)$ se, e somente se, o sistema é

**a)** $V_1 = R^3$, $W_1 = \{(x,y,z) \in R^3 ; x - y + z = 0\}$

**b)** $V_2 = R^3$, $W_2 = \{(x,y,z) \in R^3 ; x - y - 1 = 0 \text{ e } y + z = 0\}$

**c)** $V_3 = M_2(R)$, $W_3 = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in V_3 ; x - y = 0 \text{ e } z + w - 2 = 0\right\}$

**d)** $V_4 = M_2(R)$, $W_4 = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in V_4 ; x = y = 0 \text{ e } z + w = 0\right\}$

**e)** $V_5 = P_3(R)$, $W_5 = \{xt^3 + yt^2 + zt + w \in V_5 ; x - y - z = 0\}$

**f)** $V_6 = P_2(R)$, $W_6 = \{xt^2 + yt + z \in V_6 ; x - z = 0\}$

**20)** Determine um conjunto de geradores para os seguintes subespaços:

**a)** $W_1 = \{(x,y,z) \in R^3 \; ; x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$

**b)** $W_2 = \{(x,y,z) \in R^3 \; ; x + 2y - 3z = 0\}$

**c)** $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(R) \; ; a + c = 0 \text{ e } d = 0 \right\}$

**d)** $W_4 = \{xt^3 + yt^2 + zt + w \in P_3(R); y = z \text{ e } x = 0\}$

**e)** $W_1 \cap W_2$

**21)** Considere os subespaços de $R^3$ :

$V_1 = \{(x,y,z) \in R^3 \; ; x = y\}$ ; $V_2 = \{(x,y,z) \in R^3 \; ; x = y = z\}$ e $V_3 = \{(x,y,z) \in R^3 ; x = y - z\}$

**I.** Determine: **a)** $V_1 \cap V_2$ **b)** $V_1 \cap V_3$

**II.** Verifique que: **a)** $V_1 \cup V_2$ é subespaço de $R^3$ **b)** $V_1 \cup V_3$ não é subespaço de $R^3$

**22)** Em cada item a seguir, determine U+W e verifique se a soma é uma soma direta.

**( a )** $V = R^4$ , $U = \{(x,y,z,w) \in R^4 \; ; x + y = w - z = 0\}$ e $W = \{(x,y,z,w) \in R^4 \; ; z = 0 = w\}$

**( b )** $V = P_2(R)$ , $U = \{xt^2 + yt + z \in P_2(R) \; ; x - y = 0\}$ e $W = [t^2 - 1, t + 1]$

**( c )** $V = M_2(R)$ , $U = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ e $W = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$

**( d )** $V = R^3$ , $U = \{(x,y,z) \in R^3 \; ; x - y = z\}$ e $W = [(1,-1,-1)]$

**( e )** $V = M_2(R)$ , $U = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ e $W = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$

## RESPOSTAS

**1)** a) $X = (B^t)^{-1} A^{-1} C$ ; b) $X = C^{-1}(I - AB)$ ; c) $X = A^{-1}CB$ ; d) $X = [(AB^t]^{-1} C^{-1}$

**2)** $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, a, b $\in$ R.

**4)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/5 & -1 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 \end{bmatrix}$ ; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

**5)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $k \in R$ ;

**6)** p( A ) = 2 e N ( A ) = 1; p ( B ) = 2 = N ( B ); p( C ) = 2 e N( C ) = 0;
p ( D ) = 2 e N( D ) = 0; p( E ) = 3 e N( E ) = 0.

**7)** a) B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; b) impossível; c) impossível; d) F= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

e) G = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; f) H = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; g) J = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**8)** a) S = { ( 2, –1, 3 ) }; b) $S = \left\{ (x, y, z) \in R^3;\ x = \dfrac{5-3z}{2} \text{ e } y = \dfrac{z-3}{2} \right\}$;

c) S = { ( x, y, z ) ∈ $R^3$; x = y + 3 e z = – 1 } ; d) Impossível.

**9)** $S = \left\{ \left( \dfrac{1+i}{3}z + \dfrac{8-5i}{3}, \dfrac{2}{3}iz + \dfrac{5}{3}, z \right) z \in C \right\}$

**10)** O biólogo deve colocar, no tubo de ensaio, 100 bactérias da espécie I e 350 de cada uma das espécies II e III para que todo o alimento seja consumido.

**11) a)** Se k = –6, então o sistema é possível determinado; neste caso, o conjunto solução é S = { (–8, –10)}. Se k ≠ –6, o sistema é impossível.

b) Se k ≠ 1, então o sistema é possível e indeterminado. Se k = 1, o sistema é impossível.

c) Se k ≠ 2, o sistema é possível, determinado e S = { ( k +2, 1, –2 ) }. Se k = 2, o sistema é indeterminado e S = { ( x, 1, 2-x ); x ∈ R }.

d) Se k ≠1 e k ≠ –4 então o sistema é possível e determinado. Se k = –4, o sistema é impossível.
Se k = 1, o sistema é possível, indeterminado e S = { (x,y,z) ∈ $R^3$; x = –z–2 e y = –3z–3 ) }.

**12)** a = 2 e b = 4.

**13)** a) X = $A^{-1}B^{-1}C$; b) $X^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 5/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}$

**14)** a) $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2/3 & 1/3 \\ 1 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$;

b) $N = \begin{pmatrix} 1 & 1-\dfrac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{3+2i}{26} & \dfrac{-5+i}{26} \end{pmatrix}$.

**15)** a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$; b) Não é invertível; c) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 7 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 3 & 3 \\ 7 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

**16)** a) $a \neq 1$; b ) $a \neq 4$ e $a \neq -2$ .

**17)** a) $V_1$ não é espaço vetorial (a propriedade associativa não é válida para a operção +).

b) $V_2$ não é espaço vetorial $\left( (a+b).v \neq a.v + b.v \right)$.

**18)** I. a)Não. Contra-exemplo: (-2).(1,-2,3)=(-2,4,-6) ∉ W.
b) " . " " : (0,1,0)+(1,0,0)=(1,1,0) ∉ W.

c)Sim.

d)Não. Contra-exemplo: $\sqrt{2}.(1,2,3) \notin Q^3$.

e)Não. Contra-exemplo: (1,1,0)+(-1,-1,0)=(0,0,0) $\notin$ W.

f) " . " " : (2,4,0)+(-3,9,0)=(-1,13,0) $\notin$ W.

II. a) Sim.

b) Não. Contra-exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$ .

c) Não. Contra-exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin W$ .

d) Não. Contra-exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$ , mas $2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$ .

III. a) Sim

b) Sim.

IV) Não. Contra-exemplo: ( x+ iy) . A $\notin$ W, para x e y $\in$ R, com $y \neq 0$.

V) Sim.

VI) Sim.

**19)** Os itens **a**, **d**, **e** e **f** são subespaços, pois as equações que os caracterizam formam sistemas lineares homogêneos. Já os itens **b** e **c**, não são subespaços, porque as equações que caracterizam os subespaços formam sistemas lineares não homogêneos.

**20)** a)W = [(1,1/2,-1)] b) W = [(-2,1,0),(3,0,1)] c)W = $\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$ d) W = $[t^2 + t, 1]$

**21)** I. a) $V_1 \cap V_2 = V_2$ b) $V_1 \cap V_3 = \{(x, y, z) \in R^3; x = y \text{ e } z = 0\}$

II. a) Como $V_2 \subset V_1$ ,então $V_1 \cup V_2 = V_1$, logo $V_1 \cup V_2$ é subespaço de $R^3$

b) Observe que $V_1 \cup V_3 = \{(x, y, z) \in R^3; x = y \text{ ou } x = y - z\}$. Sejam u =(1,1,3) e v =(2,3,1); então $u, v \in V_1 \cup V_3$ , porém $u + v = (3, 4, 4) \notin V_1 \cup V_3$ .

**22)** ( a ) $U + W = \{(x, y, z, w) \in R^4; w = z\}$ $U \cap W = [(-1,1,0,0)]$ ,assim $U + W$ não é soma direta e $U + W \neq R^4$ .

( b ) $U + W = P_2(R), U \cap W = [t^2 + t]$, daí $U + W$ não é soma direta.

( c ) $U + W = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(R); w = 0\right\}$ e $U \cap W = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ ,

daí $U + W$ não é soma direta pois $U + W \neq M_2(R)$ .

( d ) $U + W = R^3$ , $U \cap W = \{(0,0,0)\}$ , daí $U \oplus W = R^3$ .

( e ) $U + W = M_2(R), U \cap W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$ , daí $U + W$ não é direta.