UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MATA07 – ÁLGEBRA LINEAR A
PROFs.: Enaldo Vergasta,Glória Márcia

2ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Verifique se são **verdadeiras** ou **falsas** as afirmações abaixo:

a) Dois vetores são L.D. se, e somente se, um deles é múltiplo do outro.

b) Um conjunto que contém um subconjunto de vetores L.D. é L.D.

c) Um subconjunto de um conjunto L.I. pode ser L.D.

d) Se $w_1 \in [w_2, w_3]$ então $\{w_1, w_2, w_3\}$ é L.D.

e) Se $[w_1, w_2] = [w_1, w_2, w_3]$ então $\{w_1, w_2, w_3\}$ é L.D.

f) Se $\{w_1, w_2, w_3\}$ é L.I. então $[w_1, w_2] = [w_1, w_2, w_3]$

2) Verifique se os conjuntos de vetores dados a seguir são L.I. ou L.D.

a) $V = R^4$, $S_1 = \{(1,-2,4,1), (2,1,0,-3), (0,-5,8,5)\}$

b) $V = M_{2x3}(R)$, $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \right\}$

c) $V = P_2(R)$, $S_3 = \{t^3-4t^2+2t+3,\ t^3+2t^2+4t-1,\ 2t^3-t^2-3t+5\}$.

3) Considere os vetores de $M_2(R)$ dados a seguir:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 & x \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ y & 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2y & z \end{pmatrix}$$

Determine se possível, os valores de x, y e z para que cada item abaixo seja verdadeiro.

a) $\{v_1, v_4\}$ é L.I. b) $\{v_1, v_2\}$ é L.I c) $\{v_1, v_2, v_3\}$ é L.I.

4) Verifique se os conjuntos dados a seguir são bases para os respectivos espaços. Caso não sejam bases, justifique o porquê.

a) $V_1 = R^2$, $S_1 = \{(1,-1), (-2,2)\}$ b) $V_2 = R^3$, $S_2 = \{(1,1,0), (0,0,1)\}$

c) $V_3 = P_2(R)$, $S_3 = \{t^2 - 1, t + 2, 5\}$ d) $V_4 = M_{2x3}(R)$, $S_4 = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\}$

5) Determine uma base e a dimensão dos seguintes espaços vetoriais:

a) $W_1 = [(1,0,0), (0,5,-2), (7,0,2), (3,?,2)]$ b) $W_2 = [(1,0,3), (0,-1,2), (1,-1,5)]$

c) $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(R) ; x + z - y = 0 \right\}$ d) $W_4 = \{t^3 + t^2, t^2 - 2t, 1\}$

e) $W_5 = \{(x,y,z,w) \in R^4; z = w \text{ e } y = 2x\}$

6) Determine uma base para os espaços a seguir, contendo os respectivos conjuntos de vetores. a) $V_1 = R^3, S_1 = \{(1,2,0), (0,1,-1)\}$ b) $V_2 = P_2(R), S_2 = \{t + 1, 2t - 1\}$

7) Em cada item, encontre as coordenadas do vetor v_i em relação à base a_i do subespaço gerado pelos vetores das bases dadas.

a) $a_1 = \{(1,1,1),(0,1,0)\}$, $v_1 = (3,2,3)$ b) $a_2 = \{t^2, t+1\}$, $v_2 = -2t^2$

c) $\alpha_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

8) Sejam W_1 e W_2 subespaços de R^5. Determine, justificando, a dimensão de W_2, sabendo que $W_1 \cap W_2 = [(1,-1,-2,0,0),(2,1,-1,0,0),(1,2,1,0,0)]$, dim($W_1 + W_2$) = 4 e $\{(1,2,1,0,0),(0,1,1,0,0)\}$ é uma base de W_1.

9) Sabendo que $R^4 = V \oplus W$ e $V = [(1,2,3,4),(3,6,9,12)]$, determine a dimensão de W.

10) Sejam U e V subespaços do espaço vetorial V, de dimensão igual a 6.

I. Se dim (U) = 4 e dim (W) = 5, mostre que $U \cap W \neq \{0\}$.

II. Se dim (U) = dim (W) = 4, encontre as dimensões possíveis para $U \cap W$.

11) Dê, se possível (se for impossível, explique porque), exemplos de:

a) Um conjunto L.I. de três vetores do R^3 que não geram o R^3.

b) Um conjunto L.D. de três vetores de $M_2(R)$.

c) Um subespaço U de R^4 tal que, $U \neq R^4$ e dim (U) = 4.

d) Dois subespaços U e W de R^5, tais que dim (U) = dim (W) = 3 e $U \oplus W$.

12) Verifique se as transformações dadas a seguir são lineares:

a) $T_1 : R^3 \to R^2$, $T_1(x,y,z) = (x^2, y)$

b) $T_2 : R^2 \to R^3$, $T_2(x,y) = (x+y, x, 0)$.

c) $T_3 : R^3 \to R$, $T_3(x,y,z) = 2x - 3y + 4z$.

d) $T_4 : V \to V$, $T_4(v) = -v$.

e) $T_5 : R^2 \to M_2(R)$, $T_5(x,y) = \begin{pmatrix} x+2y & 0 \\ 1 & y \end{pmatrix}$.

g) $T_7 : P_3(R) \to M_2(R)$, $T_7(xt^3 + yt^2 + zt + w) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ -z & w+z \end{pmatrix}$.

h) $T_8 : M_{2x3}(R) \to R^2$, $T_8\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = (-a+c, b+c)$.

i) $T_9 : P_n(R) \to P_n(R)$, $T_9(p) = p'$, sendo p' a derivada do polinômio p.

13) Para cada uma das transformações lineares dadas a seguir determine:

i) A lei de definição. ii) O núcleo e uma base da imagem.

a) $T_1 : R^2 \to R^3$, tal que $T_1(1,2) = (3,-1,5)$ e $T_1(0,1) = (2,1,-4)$.

b) $T_2 : R^3 \to R^2$, tal que $T_2(1,0,0) = (2,0), T_2(0,1,0) = (1,1)$ e $T_2(0,0,1) = (0,-1)$.

c) $T_3 : P_2(R) \to R^2$, tal que $T_3(t^2) = (5,7), T_3(t) = (0,5)$ e $T_3(1) = (0,1)$.

e) $T_5 : P_2(R) \to M_2(R)$, tal que $T_5(t^2 - 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} T_5(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $T_5(-2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

f) $T_6 : M_2(R) \to R$, tal que $T_6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3, T_6\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, T_6\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1$ e $T_6\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$.

14) Exemplifique se possível, as situações descritas nos itens a seguir. Caso não seja possível, justifique.

a) $T_1 : R^3 \to P_2(R)$ linear, tal que $Im(T_1)=[(1,2,3),(4,5,6)]$.

b) $T_2 : M_2(R) \to R^3$ linear, tal que $N(T_2) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$ e $Im(T_2) = [(3,1,0),(0,-1,0)]$.

c) $T_3 : M_2(R) \to P_2(R)$ linear, tal que $N(T_3) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$ e $Im(T_3) = [t^2, t+2, 1]$.

d) $T_4 : R^2 \to R^3$ linear, tal que $N(T_4) = [(1,2)]$ e $Im(T_4) = [(1,1,0)]$.

e) Uma aplicação linear injetora $T_5 : R^3 \to R^2$.

f) Uma aplicação linear sobrejetora $T_6 : R^2 \to R^3$.

g) Uma aplicação linear $T_7 : V \to W$, tal que $Im(T_7)=\{0\}$.

h) $T_8 : R^3 \to R^3$ linear, tal que $N(T_8) = \{(x,y,z) \in R^3; z + y = 0\}$.

i) Um subespaço U de $M_2(R)$ e um isomorfismo $T_9 : P_2(R) \to U$.

15) Seja T: $V \to V$ uma transformação linear. Sabendo-se que $\dim(V) = 5$ e $\dim[N(T) \cap Im(T)] = 2$, determine $\dim[N(T)+Im(T)]$, justificando. A transformação T pode ser injetora? Justifique.

16) Seja T: $M_2(R) \to M_2(R)$, definida por $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ -z & y+w \end{pmatrix}$.

I. Determine: a) $N(T)$ e $Im(T)$ b) $N(T) \cap Im(T)$ c) $\dim[N(T)+Im(T)]$

II. Verifique se $M_2(R) = N(T) \oplus Im(T)$.

17) Verifique, em cada item a seguir, se a transformação linear T_i é um isomorfismo. Em caso afirmativo, determine a transformação inversa de T_i.

a) $T_1 : R^3 \to R^3$, tal que $T_1(1,2,1) = (1,2,3)$, $T_1(0,1,0) = (2,1,5)$ e $T_1(0,4,1) = (0,3,2)$.

b) $T_2 : P_2(R) \to R^3$, tal que $T_2(xt^2 + yt + z) = (x,y,z)$

c) $T_3 : R^3 \to P_2(R)$, tal que $T_3(x,y,z) = 2xt^2 + (4x-y)t + (2x+3y-z)1$.

d) $T_4 : R^4 \to M_2(R)$, tal que $T_4(1,0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T_4(0,1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$T_4(0,0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $T_4(0,0,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e) $T_5 : R^2 \to R^2$, definida por $T_5(x,y) = (x-y, x-y)$.

18) Determine a matriz associada à transformação T_i com relação às bases α_i e β_i.

a) $T_1 : R^2 \to R^3$, $T_1(x,y) = (x+3y, x, x-y)$, α_1 é a base canônica de R^2 e $\beta_1 = \{(1,0,-1),(0,0,1),(0,2,4)\}$.

b) $T_2 : M_2(R) \to R^3$, $T_2\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x, x-3y+w, z-w)$, $ß_2 = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,-2)\}$ e

$$\alpha_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

c) $T_3 : P_2(R) \to M_2(R)$, $T_3(xt^2 + yt + z) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x+y-z \end{pmatrix}$, $a_3 = \{t+1, t+2, t^2\}$ e β_3 é a base canônica de $M_2(R)$.

d) $T_4 : V \to V$, $\alpha_4 = \beta_4 = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $T_4(v_1) = 2v_1$, $T_4(v_2) = -3v_2$ e $T_4(v_3) = v_3$.

e) $T_5 : R^3 \to R^3$, $T_5(v) = v$, $a_5 = \{(1,2,0),(2,1,0),(0,0,1)\}$ e β_5 é a base canônica de R^3.

19) Determine a transformação linear T_i nos seguintes casos:

a) $T_1 : R^3 \to R^2$, $[T_1]^{a_1}_{ß_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, sendo $a_1 = \{(1,1,0), (0,0,1), (1,2,3)\}$ e $ß_1 = \{(2,1), (-1,1)\}$.

b) $T_2 : P_2(R) \to M_2(R)$, $[T_2]^{a_2}_{ß_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, sendo $ß_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ e $a_2 = \{t, t+2, t^2\}$.

c) $T_3 : P_2(R) \to P_2(R)$, $[T_3]^{a_3}_{a_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = a_2$.

d) $T_4 : R^3 \to R^3$, $[T_4]^{a_4}_{ß_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a_4 = a_1$, $ß_4 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

20) Considere $T : R^3 \to R^3$, tal que $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, onde $\alpha = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,2)\}$ e $ß = \{(1,0,0),(0,-1,1),(1,0,2)\}$. Determine as coordenadas dos seguintes vetores em relação à base β.

a) $v_1 = (1,0,1)$ b) $v_2 = (1,7,11)$ c) $u = (x,y,z)$

21) Seja T o operador linear em R^2,definido por T(v)=A.v, onde $A=\begin{pmatrix}1\,2\\3\,4\end{pmatrix}$. Encontre as matrizes de T, $[T]_{a_i}^{a_i}$, em relação às bases dadas a seguir.

a) α_1 é a base canônica de R^2. b) $a_2=\{(1,3),(2,5)\}$.

22) Considere as bases de $P_2(R)$, R^2 e $M_2(R)$, respectivamente, $a=\{t^2, t+1, 3\}$, $ß=\{(1,0),(-1,-1)\}$ e δ é a base canônica. Sejam **f** e **g** as transformações lineares definidas por

$$f: M_2(R)\to P_2(R),\ \text{tal que } [f]_a^d=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

$$g: P_2(R)\to R^2,\ \text{tal que } [g]_ß^a=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\0 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

Determine: a) $[g\circ f]_ß^d$ b) $(g\circ f)\begin{pmatrix}1\,0\\2\,1\end{pmatrix}$ c) $g(xt^2+yt+z)$ d) $f\begin{pmatrix}x & y\\z & w\end{pmatrix}$ e) $(g\circ f)\begin{pmatrix}x & y\\z & w\end{pmatrix}$

23) Considere a transformação linear T: V$\to$W dada por $[T]_ß^a=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\0 & 1 & 2 & -2\\0 & 2 & 4 & -4\\1 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, onde α e β são bases de V e W, respectivamente.

I. Determine: a) dim (V) b) dim (W) c) dim [Im(T)] d) dim [N(T)]

II. Classifique em verdadeiro ou falso:

a) T é uma transformação linear invertível.

b) A dimensão da imagem de T é igual ao posto da matriz $[T]_ß^\alpha$.

c) Im(T) $=[v_1, v_2, v_3, v_4]$, onde

$$[v_1]_ß=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\ [v_2]_ß=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\0\end{bmatrix},\ [v_3]_ß=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\1\end{bmatrix}\ \text{e}\ [v_4]_ß=\begin{bmatrix}-1\\-2\\-4\\-1\end{bmatrix}$$

d) O conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é uma base de Im(T).

e) $\text{nul}\,[T]_b^a=4-\text{p}[T]_b^a=\dim(V)-\dim[Im(T)]$.

f) $\text{p}[T]_ß^a\neq \text{p}[T]_{ß'}^{a'}$, onde a', ß' são bases de V e W, respectivamente.

g) $\text{nul}[T]_ß^a=\text{nul}[T]_{ß'}^{a'}=\dim[N(T)]$, onde a', ß' são bases de V e W, respectivamente.

24) Seja T : P_4(R)$\to$ P_3(R) uma transformação linear cuja matriz em relação às bases canônicas é

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b^2 & b \end{pmatrix}$$. Determine se possível, os valores da constante **b**, nos seguintes casos:

a) T é injetora b) T é sobrejetora c) dim [N(T)] = 2.

25) Seja $T: R^3 \to P_3(R)$, definida por: T(1,0,0) = $t^2 - 1$, T(0,1,0) = t e T(0,0,1) = 2 .

I. Escolha bases α e β, do modo mais conveniente e determine a matriz $[T]^{a}_{ß}$.

II. Calcule: a) $T^{-1}(xt^2 + yt + z)$ b) $[T^{-1}]^{ß}_{a}$ c) $[T^{-1}]^{ß}_{a} \cdot [T]^{a}_{ß}$

O que se pode concluir sobre o exposto nos itens anteriores?

26) Dê, se possível, as transformações lineares pedidas a seguir, através de uma matriz associada.

a) $T_1 : R^3 \to R^2$, sobrejetora.

b) $T_2 : M_2(R) \to P_3(R)$, injetora.

c) $T_3 : M_2(R) \to M_2(R)$, dim $N(T_3) = 2$

d) $T_4 : R^3 \to M_2(R), N(T_4) = [(1,1,1)]$

e) $T_5 : V \to W$, inversível, dim (W) = 3 e dim (V) = 5.

f) $T_6 : R^2 \to R^3$, sobrejetora.

RESPOSTAS

01) a) V b) V c) F d) V e) V f) V g) F.

02) a) L.D. b) L.D. c) L.I.

03) a) $y \neq 0$ ou $z \neq 0$. b) $x \in R$. c) x, $y \in R$

04) a) S_1 não é base de R^2 porque os vetores são L.D.

b) S_2 não é base de R^3 porque não geram o R^3.

c) S_3 é base de $P_2(R)$.

d) S_4 não é base de $M_{2x3}(R)$ porque não geram o $M_{2x3}(R)$.

e) S_5 não é base de $M_2(R)$ porque os vetores são L.D.

05)

a) $a_1 = \{(1,0,0),(0,5,-2),(7,0,2)\}$, $\dim(W_1) = 3$

b) $a_2 = \{(1,0,3),(0,-1,2)\}$, $\dim(W_2). = 2$

c) $a_3 = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(W_3). = 3$

d) $a_4 = \left\{t^3 + t, t^2 - 2t, 1\right\}$, $\dim(W_4) = 3$

e) $a_5 = \{(1,2,0,0),(0,0,1,1)\}$, $\dim(W_5) = 2.$

06) a) $a_1 = \{(1,2,0),(0,1,-1),(x,y,z)\}$, onde $z + y - 2x = 0$.

b) $a_2 = \left\{t+1, 2t-1, xt^2 + yt + z\right\}$, onde $x \neq 0$.

07) a) $[v_1]_\alpha = \begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$ b) $[v_2]_\alpha = \begin{bmatrix}-2\\ 0\end{bmatrix}$ c) $[v_3]_\alpha = \begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$ d) $[v_4]_\alpha = \begin{bmatrix}-7\\ 11\\ 14\\ 1\end{bmatrix}$

08) Observe que: $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.

Como $\dim(W_1) = 2$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$ e $\dim(W_1 + W_2) = 4$, daí $\dim(W_2) = 4$

09) $\dim(W) = 3$.

10) I. Observe inicialmente que $\dim(U+W) \leq \dim(V) = 6$.

Então: $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) \geq 4 + 5 - 6$.

Daí, $\dim(U \cap W) \geq 3$, logo $U \cap W \neq \{0\}$.

II. É verdade que: $U \subseteq U+W \subseteq V$. Assim, $4 \leq \dim(U+W) \leq 6$.

Então pelo fato que $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W)$, temos que $\dim(U \cap W)$ pode ser 4, 3 ou 2.

11) a) Impossível, pois...

b) $S = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$;

c) Impossível, pois...

d) Impossível, pois se $U \oplus W = R^5$, temos que $U \cap W = \{0\}$ e $U + W = R^5$,

então, $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$; $5 = 3 + 3 - 0$ (absurdo).

12) As transformações dos itens *b, c, d, f, g, h* e *i* são lineares e as transformações dos itens *a* e *e* não são lineares.

13)

a) $T_1(x,y) = (2y - x, y - 3x, 13x - 4y)$, $N(T_1) = \{0\}$ e $a_1 = \{(-1,-3,13),(2,1,-4)\}$.

b) $T_2(x,y,z) = (2x + y, y - z)$, $N(T_2) = [(-1/2, 1, 1)]$ e $a_2 = \{(2,0),(1,1)\}$.

c) $T_3(xt^2 + yt + z) = (5x, 7x + 5y + z)$, $N(T_3) = [t - 5]$ e $a_3 = \{(5,7),(0,5)\}$.

d) $T_4(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+2y & 0 & 3z-9x-6y \\ 3x+6y & 4x+9y & 15z-40x-20y \end{pmatrix}$ $N(T_4) = \{(0,0,0)\}$ e

$a_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \right\}$.

e) $T_5(xt^2 + yt + z) = \begin{pmatrix} 2x+z & y \\ 2x & x+y+z \end{pmatrix}$, $N(T_5) = \{0\}$ e $a_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.

f) $T_6\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = x + w$, $N(T_6) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ e $a_6 = \{3\}$.

14) a) $T_1(1,0,0) = (1,2,3)$, $T_1(0,1,0) = (4,5,6)$ e $T_1(0,0,1) = (5,7,9)$.

b) Impossível, pois dim $[N(T_2)] = 1$, dim $[Im(T_2)] = 2$ e $1+2 \neq$ dim$[M_2(R)]$.

c) $T_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = t^2$, $T_3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = t + 2$, $T_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$ e $T_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$.

d) $T_4(1,0) = (1,1,0)$, $T_4(1,2) = (0,0,0)$.

e) Impossível, pois, dim $[Im(T_5)] = 2$, assim dim $[N(T_5)]$=dim (R^3) – dim $Im[(T_5)] = 1$. Daí, T_5 não seria injetora.

f) Impossível, pois dim $[Im(T_6)]$ = dim (R^2) – dim $[N(T_6)]$, que é no máximo igual a dois, se dim $[N(T_6)] = 0$. E como $Im(T_6) \subseteq R^3$, temos que T_6 não pode ser sobrejetora nessas condições.

g) T_7 é a função identicamente nula, isto é, $T_7(v) = 0, \forall\ v \in V$. Para qualquer espaço vetorial V, ela é uma transformação linear.

h) $T_8(1,0,0) = (0,0,0)$, $T_8(0,1,-1) = (0,0,0)$ e $T_8(0,0,1) = (1,0,0)$.

i) O subespaço U de $M_2(R)$ deve ter dimensão três, por exemplo

$U = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$.

15) Como dim $[N(T)]$+ dim $[Im(T)]$ = dim(V) = 5, temos:

dim$[N(T)+Im(T)]$ = dim $[N(T)]$ + dim $[Im(T)]$ – dim$[N(T) \cap Im(T)] = 5 – 2 = 3$.

Como, por hipótese, dim $[N(T) \cap Im(T)] = 2$, então $2 \leq$ dim $[N(T)] \leq 5$ = dim(V), daí $N(T) \neq \{0\}$, e, portanto, a transformação não pode ser injetora.

16)

I. a) $N(T) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$, $Im(T) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$.

b) $N(T) \cap Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ c) $\dim[N(T) + Im(T)] = 4$.

II. Como N(T)+Im(T) é um subespaço de $M_2(R)$ e possui dimensão 4, então $N(T)+Im(T) = M_2(R)$. Por outro lado, $N(T) \cap Im(T) = \{0\}$, daí $N(T) + Im(T) = M_2(R)$.

17) a) T_1 é invertível e $T_1^{-1}(1,2,3)=(1,2,1)$, $T_1^{-1}(2,1,5)=(0,1,0)$ e $T_1^{-1}(0,3,2)=(0,4,1)$.

b) T_2 é invertível e $T_2^{-1}(x,y,z) = xt^2 + yt + z$.

c) T_3 é invertível e $T_3^{-1}(xt^2 + yt + z) = (x/2, 2x-y, 7x-3y-z)$.

d) T_4 não é invertível pois, dim $[\mathrm{Im}(T_4)] = 3$.

e) T_5 não é invertível pois, dim $[\mathrm{Im}(T_5)] = 1$.

18) a) $[T_1]_{\beta_1}^{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $[T_2]_{\beta_2}^{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) $[T_3]_{\beta_3}^{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $[T_4]_{\beta_4}^{\alpha_4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $[T_5]_{\beta_5}^{\alpha_5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19) a) $T_1(x,y,z) = (9x-5y, -3x+2y)$ b) $T_2(xt^2 + yt + z) = \begin{pmatrix} y & (2y+z)/2 \\ (z-2x)/2 & x \end{pmatrix}$

c) T_3 é a transformação identidade em $P_2(R)$ d) $T_4(x,y,z) = (2x-y, z-3y+3x, y-x)$

20) a) $[T(v_1)]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $[T(1,7,11)]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 15/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$ c) $[T(x,y,z)]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ (5x+3y-z)/2 \\ (x+y-z)/2 \end{bmatrix}$

21) a) $[T]_{\alpha_1}^{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$ b) $[T]_{\alpha_2}^{\alpha_2} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

22) a) $[g \circ f]_\beta^\delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; b) $(g \circ f)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3)$; c) $g(xt^2 + yt + z) = (x, y+z)$

d) $f\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x+y)t^2 + zt + w$

23) I. a) dim (V)= 4 b) dim (W) = 4 c) dim [Im(T)] = 2 d) dim [N(T)] = 2

II. a) F b) F c) V d) F e) V f) F g) V

24) a) Impossível, pois, dim [N(T)] ≥ 1, $\forall$ b $\in R$; b) b $\neq 1$; c) b = 1.

25) I. $[T]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; II. a) $T^{-1}(xt^2 + yt + z) = (x, y, (z+x)/2)$ b) $[T^{-1}]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ c) $[T^{-1}]_\alpha^\beta [T]_\beta^\alpha = \mathrm{Id}$

As matrizes $[T]_\beta^\alpha$ e $[T^{-1}]_\alpha^\beta$ são invertíveis.

26) a) $[T_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $[T_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $[T_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $[T_3]^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

onde $a = \{(1,1,1), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e) Impossível f) Impossível