UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAR I
Profs: Enaldo Vergasta e Glória Márcia

3ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Sejam u = (x_1, y_1, z_1) e v = (x_2, y_2, z_2) vetores do R^3. Verifique se cada uma das seguintes funções é um produto interno em R^3:
a) $u \cdot v = x_1 x_2 + 3 y_1 y_2$ b) $u \cdot v = 3 x_1 x_2 + 5 y_1 y_2 + 2 z_1 z_2$

2) Considere o seguinte produto interno em P_2: $\langle p(x),q(x)\rangle = a_2 b_2 + a_1 b_1 + a_o b_o$, sendo $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_o$ e $q(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_o$. Para os polinômios $p_1 = x^2 - 2x + 3$, $p_2 = 3x - 4$ e $p_3 = 1 - x^2$, calcule:

a) $\langle p_1 , p_2 \rangle$ b) $\|p_1\|$ e $\|p_3\|$ c) $\| p_1 + p_2 \|$ d) $\dfrac{p_2}{\| p_2 \|}$

3) Considere a função: $f : R^2 \times R^2 \to R$

$$((x_1, y_1),(x_2, y_2)) \mapsto [x_1 \ \ y_1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Mostre que *f* é um produto interno em *R* e calcule:
a) $\|(1,3)\|$ b) Um vetor unitário a partir de (1,3) c) Um vetor ortogonal a (1,3)

4) Considere o R^3 munido do produto interno usual e o subconjunto *B* = {(1, 2, –3), (2, –4, 2)} desse espaço vetorial. Determine:
a) O subespaço *S* gerado por *B*.
b) O subespaço $S^{\perp}$ ortogonal a *S*.

5) Considere o R^3 munido do produto interno usual. Dados os subespaços
$S_1 = \{(x, y, z) \in R^3; \quad x - 2y + 3z = 0\}$ e $S_2 = \{t.(2,1,-1); \quad t \in R\}$, determine $S_1^{\perp}$ e $S_2^{\perp}$.

6) Considere, em R^3, o produto interno usual. Em cada um dos seguintes itens, determine os valores de *m* para os quais os vetores *u* e *v* são ortogonais.
a) $u = (3m, 2, -m)$ e $v = (-4, 1, 5)$ b) $u = (0, m - 1, 4)$ e $v = (5, m - 1, -1)$

7) Considere o R^3 com o produto interno usual. Determine um vetor *u* do R^3, ortogonal aos vetores $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (5, 1, 3)$ e $v_3 = (2, -2, -3)$.

8) Determine os valores de *a*, *b* e *c* de modo que o conjunto *B* = {(1, – 3, 2), (2, 2, 2), (*a*, *b*, *c*)} seja uma base ortogonal do R^3 em relação ao produto interno usual. Construir, a partir de *B,* uma base ortonormal.

9) Quais dos seguintes operadores são ortogonais?

a) $T: R^2 \to R^2,\ T(x,y) = (-y,-x)$ b) $T: R^2 \to R^2,\ T(x,y) = (x+y, x-y)$

c) $T: R^3 \to R^3,\ T(x,y,z) = (x,0,0)$

10) Verifique quais das seguintes matrizes são ortogonais:

a) $\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$

11) Construir uma matriz ortogonal cuja primeira coluna seja:

a) $(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ b) $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

12) Determine valores reais de *a* e *b* para que os seguintes operadores no R^3 sejam simétricos:

a) $T: R^3 \to R^3,\ T(x,y,z) = (\ 3x-2y, ax+y-3z\ , by+z\ )$

b) $T: R^3 \to R^3,\ T(x,y,z) = (\ x+2y\ , ax+4y+bz\ \ ,2x-3y+z\ )$.

13) Mostre que, se *A* e *B* são matrizes ortogonais, então *AB* também é ortogonal.

13) Determine os polinômios característicos, os autovalores e os autovetores dos operadores a seguir.

a) $T_1: R^2 \to R^2\ , T_1(x,y) = (\ y\ , 2x+y\ )$ b) $T_2: R^2 \to R^2\ , T_2(x,y) = (-\ y\ , x\ )$

c) $T_3: R^3 \to R^3\ , T_3(X) = AX$, onde $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $T: R^2 \to R^2$ definido por $T(x,y) = (\ 4x+5y\ , 2x+y\ )$

e) $T: R^3 \to R^3$, definido por $T(x,y,z) = (\ 3x-4z\ , 3y+5z\ , -\ z\ )$

f) $T: R^3 \to R^3$, definido por $T(x,y,z) = (\ 3x-3y-4z\ , 3y+5z\ , -\ z\ )$.

14) Verifique quais dos operadores definidos abaixo são diagonalizáveis e dê a sua forma diagonal

a) $T_1: R^2 \to R^2\ , T_1(x,y) = (\ x+y\ , 2x+y\ )$

b) $T_2: R^3 \to R^3\ , T_2(x,y,z) = (\ x+y\ , x-y+2z\ , 2x+y-z\ )$

c) $T_3: R^4 \to R^4\ , T_3(x,y,z,w) = (\ x\ , x+y\ , x+y+z\ , x+y+z+w\ )$

d) $T_6: R^3 \to R^3$, dado por $[T_6] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e) $T_5: R^3 \to R^3$, dado por $[T_5] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $T_6: R^3 \to R^3$Ï, dado $[T_6] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ g) $T_3: M_2(R) \to M_2(R)$; $T_3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y & 2y \\ y+z & w \end{pmatrix}$

h) $T_1: R^2 \to R^2\ ,\ T_1(1,1) = (\ 2,2\ );\ T_1(\ 0,1) = (\ 0,3\ )$

15) Para que valores de **a** as matrizes abaixo são diagonalizáveis?

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

16) Encontre o operador linear $T : R^2 \to R^2$, tal que T tenha autovalores -2 e 3, associados aos autovetores (3y,y) e (-2y,y), respectivamente, com $y \neq 0$.

17) Seja $T : P_2(R) \to P_2(R)$ o operador linear definido por : $T(t^2) = -2t^2$, T(t+1) = t +1 e T(2) = -2. Determine uma base α de $P_2(R)$, tal que $\left[T^{-1}\right]_\alpha^\alpha$ seja diagonal.

18) Determine uma matriz P_i que diagonaliza a matriz A_i ,em cada item abaixo, e calcule a matriz $P_i^{-1}AP_i$.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{pmatrix}$ b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

19) Dê exemplo de operadores diagonalizáveis, através de suas matrizes na forma diagonal, satisfazendo as condições citadas em cada item abaixo, quando possível.

a) $T_1 : M_2(R) \to M_2(R)$,não sobrejetor,com autovalores 1, 2 e 3.

b) $T_2 : P_2(R) \to P_2(R)$,tal que $V_2 = \left[t^2 + t, t\right]$ e $V_{-1} = [1]$.

c) $T_3 : V \to V$,com polinômio característico $p(\lambda) = (3-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)$.

d) $T_6 : P_2(R) \to P_2(R)$,tal que $N(T_6) = \left[t^2, 1\right]$ e $V_2 = [t]$.

20) Se $p(x) = (3-x)^2(2+x)^4(1-x)^2$ é o polinômio característico de um operador linear $T : V \to V$, determine a matriz $[T]_\alpha^\alpha$ sabendo que α é uma base formada por autovetores de T.

21) Seja T um operador linear em V. Classifique em verdadeira ou falsa cada sentença abaixo.

a) Todo operador linear é diagonalizável.
b) Se dim V =3 e T possui três autovalores distintos, então T é diagonalizável.
c) Se dim V =3 e T possui dois autovalores distintos, então T não é diagonalizável.
d) Existem operadores lineares que possui apenas um autovalor e são diagonalizáveis.
e)Se o polinômio característico de T possui grau três então dim V =3.

RESPOSTAS

1) a) Sim b) Sim

2) a) –18 b) $\sqrt{14}$ e $\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$

3) a) 5 b) $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ c) $t.(-7, 4)$

4) a) $S = \{(x,y,z) \in R^3;\ x + y + z = 0\}$)

b) $S^{\perp} = \{(x,y,z) \in R^3;\ x = y = z\}$).

5) $S_1^{\perp} = \{(x, -2x, 3x);\ x \in R\}$ e $S_2^{\perp} = \{(x,y,z) \in R^3;\ 2x + y - z = 0\}$)

6) a) 2/17 b) 3 ou -1

7) $u = a\,(1, 7, -4),\ a \in R$)

8) $t.(-5,1,4), t \neq 0$ e $B = \{(\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}})\}$

9) a) Sim b) Não c) Não

10) a) Sim b) Sim c) Não d) Sim

11)a) $\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

12) a) $a = -2$ e $b = -3.$

b) $a = 0$ e $b = -3.$

13) a) $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$,autovalores 2 e -1,com autovetores associados

v=(x, 2x), $x \neq 0$ e u=(-y,y), $y \neq 0$, respectivamente.

b) $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, T_2 não possui autovalores reais.

c) $p(\lambda) = (2 - \lambda)^2(3 - \lambda)$,autovalores 2 e 3, com autovetores associados

v=(0,0,z), $z \neq 0$ e u=(0,y,y), $y \neq 0$, respectivamente.

d) $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 6$, $\lambda = -1$, $\lambda = 6$,

$V_{-1} = \{(x,-x); x \in R\} = [(1,-1)]$, $V_{-1} = \{(x, \frac{5}{2}x); x \in R\} = [(1, \frac{5}{2})]$ ou $[(2, 5)]$.

e) $p(\lambda) = (3 - \lambda)^2.(-1 - \lambda)$, $\lambda = -1$, $\lambda = 3$,

$V_{-1} = \{(z, \frac{5}{4}z, z);\ z \in R\} = [(1, \frac{5}{4}, 1)] = [(4, 5, 4)]$,

$V_3 = \{(x,y,0); x,y \in R\} = [(1,0,0),(0,1,0)]$

f) $p(\lambda) = (3-\lambda)^2.(-1-\lambda)$, $\lambda = -1$, $\lambda = 3$,

$V_{-1} = \{(\frac{1}{16}z, -\frac{5}{4}z, z); z \in R\} = [(\frac{1}{16}, -\frac{5}{4}, 1)]$ ou $[(1, -20, 16)]$,

$V_3 = \{(x,0,0); x \in R\} = [(1, 0, 0)]$.

14) a) T_1 é diagonalizável pois $\alpha_1 = \{(1,1),(0,1)\}$ é uma base de auto vetores de T_1,

e $[T_1]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) T_2 não é diagonalizável c) $[T_3]^{\beta}_{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, β base de autovetores

d) e) f) g) h)

15)

16) Considerando a base $\alpha = \{(3,1), (-2,1)\}$, de R^2 podemos definir $T: R^2 \to R^2$,
T(3,1) = -2(3,1) = (-6,-2) e T(-2,1) = 3(-2,1) = (-6, 3)

17) $\alpha = \{t^2, t+1, 2\}$

18) a) $P_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; $P_1^{-1}A_1P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P_2^{-1}A_2P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

19) a) Como T_1 não é sobrejetor, então $\dim N(T_1) \neq 0$, daí zero é um autovalor de T_1. Então temos autovalores distintos em um espaço de dimensão quatro, logo diagonalizável:

$[T_1]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $[T_1]^{\beta}_{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\beta = \{t^2 + t, t, 1\}$

c) $[T_3]^{\beta}_{\beta} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, β base de auto vetores de T_3 d) $[T_3]^{\beta}_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\beta = \{t^2, 1, t\}$

20) $[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

21) a) F ; b)V ; c) F ; d) V ; e) V